

Cours n° 7
(fin)

Réduction des endomorphismes

Théorie de Jordan, décomposition
de Dunford

[Rf Gaudon
+ Fenech Anselmes
revo d'algèbre Dunford]

[+ révision du cours pour le poutiel]

Théorème : 1) Soit K un corps commutatif algébriquement clos,
 E un K -ev de dim $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $d_1, \dots, d_r$
 les vp de χ_u à $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Il existe pour tout $i = 1, \dots, r$
 une unique suite $\nearrow$ d'entiers $p_{1,i} \leq p_{2,i} \leq \dots \leq p_{d_i,i}$
 et une base B de E dans laquelle la matrice de u est
 de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_{p_{1,1}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_{p_{d_1,1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_{p_{d_r,r}} \end{pmatrix}$$

blobs relatifs à d_1 blobs relatifs à d_r

où $B_{p_{d_i,i}} = \begin{pmatrix} d_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \in M_{p_{d_i,i}}(K)$.

2) la matrice B est unique à l'ordre près des d_i .

Définition : La matrice B est appelée réduite de Jordan.
 les blocs $B_{p_{d_i,i}}$ sont des "blocs de Jordan".

Remarque 1) Le polynôme minimal de $B_{p_{d_i,i}}$ est
 $(X - d_i)^{p_{d_i,i}}$, son polynôme caractéristique est $(d_i - X)^{p_{d_i,i}}$.

2) Le polynôme minimal de a est $\text{ppcu} \left((x - d_i)^{p_{a,i}} \right)_{i=1}^r$
 le polynôme caractéristique de a est $\prod_{i=1}^r (d_i - x)^{p_{a,i}}$

Définition Les polynômes minimaux $(x - d_i)^{p_{a,i}}$ des $\mathcal{B}_{a,i}$ pour $i = 1, \dots, r$ et $a = 1, \dots, p_a$ sont appelés facteurs invariants de a .

Théorème : Deux matrices de $M_n(K)$ sont semblables si elles ont m facteurs invariants.

Exemple dans $M_{12}(K)$ (...)

Remarque Une matrice M est diagonalisable si $M \in M_n(K)$

chaque bloc de Jordan de sa réduction de Jordan est de taille 1.

III Décomposition de Dunford

Au cours de l'étude de la réduction de Jordan, on a vu que la restriction de a à $\mathcal{B}(E)$ à chacun de ses sous-espaces caractéristiques $\mathcal{B}_i$ est la somme d'une translation et d'un endomorphisme nilpotent. Plus généralement :

Théorème (décomposition de Dunford) : Soit K un corps commutatif algébrique clos, E un K -v de dimension finie $n \geq 1$. Pour tout élément $a \in \mathcal{B}(E)$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que

- ① d est diagonalisable et n est nilpotent,
- ② $a = d + n$,
- ③ $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration 1) L'existence de d et de n résulte du théorème de Jordan : en effet, avec les notations utilisées dans l'étude de ce théorème, on a $E = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ où M_i est le m_i -espace caractéristique associé à la v.p. α_i .

On va définir d et n par restriction à chaque M_i .

En notant $m_i = m / n_i$, il suffit de prendre

$$d_i = d / n_i = \alpha_i \cdot \text{Id}_{M_i} \quad \text{et} \quad n_i = n / n_i = m_i - d_i.$$

Comme d_i est une transformation linéaire, on a $d_i \circ m_i = m_i \circ d_i$, d'où finalement d et n vérifient ①, ② et ③.

2) Unicité : on va montrer l'unicité de d (d'où celle de n puisque $m = d + n$).

Soient donc d et n vérifiant les conditions ①, ② et ③.

Comme $\text{dom} = \text{no} d$, tous sous-espaces propres E_α de d est stable par n . De plus E_α étant algébriquement clos, on peut triangulariser la restriction de n à E_α .

Il existe donc une base de E_α dans laquelle la matrice de n / E_α est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{1} \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{dans } E_\alpha \rightarrow$$

Dans cette base, comme dans toute base de E_α , la matrice de d / E_α est égale à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, ainsi le polynôme caractéristique de d / E_α et celui de $(d+n) / E_\alpha$ coïncident, et E_α est aussi le sous-espace caractéristique de n associé à α . Avec les notations précédentes ceci impose $d / M_i = \alpha_i \cdot \text{Id}_{M_i}$ et d est entièrement déterminée, unique $E = \bigoplus M_i$.

Application : calcul des puissances de $M = M + D$ ($MD = DM$ diagonalisable nilpotente).

Résultats partiel

E K-esp de dim finie $u \in \mathcal{L}(E)$

→ Valeurs propres

$\lambda \in K$ tel que $\exists z \in E \setminus \{0\}$, $uz = \lambda z$
 car $\rightarrow \det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$

Sous-espaces propres λ v.p

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des v.p de u $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_n} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$$

→ Polynôme caractéristique

$$P_u(x) = \det(u - x \text{Id}_E)$$

λ v.p de $u \iff \lambda$ racine de P_u

→ Polynômes d'endomorphisme

$$P \in K[X] \quad P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$$

$$P(u) = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_p u^p$$

$$\text{car } u^0 = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{\text{a fois}} = \text{Id}_E$$

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u)$$

Une des moyennes

$$\text{Si } P = P_1 \dots P_r$$

$$P_i \text{ : premiers } \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$P \in K[X]$$

$$\ker P(u) = \bigoplus \ker P_i(u)$$

→ Polynôme minimal

il existe un polynôme π_u unitaire unique

tel que

$$\{P \in K[X] ; P(u) = 0\} = \{P \times \pi_u ; P \in K[X]\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \pi_u(u) = 0, \\ \bullet P(u) = 0 \Leftrightarrow \pi_u \mid P, \\ \bullet P_u(u) = 0 \text{ (la de Cayley Hamilton)}, \\ \text{et donc } \pi_u \mid P_u. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet d \text{ est vp de } u \text{ et } P(u) = 0 \xrightarrow{P} P(d) = 0, \\ \bullet d \text{ est vp de } u \Leftrightarrow d \text{ est racine de } \pi_u, \\ \bullet d \text{ est vp de } u \Leftrightarrow d \text{ est racine de } P_u. \end{array} \right.$$

→ Triagonalisabilité

Def $\alpha \in L(E)$ est triagonalisable si il existe une base B de E dans laquelle $\text{Mat}_B(\alpha)$ est triangulaire supérieure.

Caractérisation α triagonalisable équivaut à
 → P_α est scindé sur K .

Prop α trig et $\alpha(F) \subset F$ (F sev de E)
 entraîne $\alpha|_F$ trig.

Prop u et v trig et $u \circ v = v \circ u$
 entraîne u et v simultanément trig.

→ Diagonalisabilité [on note $P_A(x) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x)^{\alpha_i}$ quand P_A scindé] d'où 2.2

Def A diagonalisable s'il existe une base B de E formée de vecteurs propres

Caractérisation de diagonalisabilité équivalente à

→ P_A est scindé sur K et pour tout i

$$\alpha_i = \dim E_{\lambda_i}$$

→ Il existe des v de E tq

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

→ Il existe $P \in K[x]$ scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$,

→ Π_A est scindé à racines simples.

Prop A diag et $\mu(F) \subset F$ (F scv de E)
alors même $A|_F$ diag.

Prop u et v diag et $u \circ v = v \circ u$
alors u et v sont diag.