Licence de Mathématiques L3

2007 - 2008

Algèbre, groupes et géométrie

Semaine 1

Dans tout ce qui suit, E désigne un K-espace vectoriel de dimension n ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Ex1 Donner un exemple d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u$ et un exemple tel que $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker u$ ne sont pas en somme directe.

Ex2 M.q. la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ de n sous-espaces vectoriels de E est directe ssi pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$.

Ex3 On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ et on note q_i la projection sur F_i de direction $\sum_{j \neq i} F_j$.

M.q. q_i est un endomorphisme, préciser son image et son noyau. M.q. $q_i^2 = q_i$, $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{n} q_i = Id_E$.

Ex4 M.q. $(\mathcal{M}_n(K), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif si $n > 1$.

Ex5 Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

i) Traduire par une égalité matricielle le lien entre $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et P.

ii) Soient $x = \sum x_i e_i = \sum x'_i f_i$ un vecteur de E.
Ecrire une égalité liant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ en utilisant i).

iii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.
Toujours par un calcul matriciel retrouver l'égalité liant A, A' et P.

Ex6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{A})$ où $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif unitaire. M.q. M est inversible ssi $\det(M)$ est inversible dans $\mathbb{A}$. Cas particulier de $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$.

Ex7 Ici K est un corps commutatif non précisé. M.q une forme n-linéaire alternée sur E est antisymétrique ; m.q la réciproque est vraie si K est de caractéristique $\neq 2$.