

Algèbre et géométrie

Corrigé de la feuille 10

Exercice 1. Démontrer que $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}g(t) dt$ définit un produit scalaire (f et g sont des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients complexes).

Pour démontrer que c'est un produit scalaire il faut vérifier que c'est
- sesquilinéaire :

$$\begin{aligned}\langle f_1 + \lambda f_2, f \rangle &= \int_a^b \overline{(f_1 + \lambda f_2)}g \\ &= \int_a^b \overline{f_1}g + \overline{\lambda} \int_a^b \overline{f_2}g \\ &= \langle f_1, f \rangle + \overline{\lambda} \langle f_2, f \rangle;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, g_1 + \lambda g_2 \rangle &= \int_a^b \overline{f}(g_1 + \lambda g_2) \\ &= \int_a^b \overline{f}g_1 + \lambda \int_a^b \overline{f}g_2 \\ &= \langle f, g_1 \rangle + \lambda \langle f, g_2 \rangle .\end{aligned}$$

- hermitien : $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f}g$ est égal à $\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int_a^b \overline{g}f} = \int_a^b g\overline{f}$.

- défini : $\langle f, f \rangle = \int_a^b \overline{f}f = \int_a^b |f|^2$ est nul si et seulement si la fonction polynômiale f est nulle en tout $t \in [a, b]$.

- positif : $\langle f, f \rangle = \int_a^b |f|^2 \geq 0$.

Exercice 2. Démontrer que $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t\overline{A} B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On vérifie de même qu'à l'exercice 2 que c'est sesquilinéaire (sachant que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$) et hermitien. Pour vérifier qu'elle est définie et positive il faut d'abord calculer $\langle A, A \rangle =$

$\text{tr}({}^t\overline{A} A)$: si on appelle a_{ij} les coefficients de la matrice A , alors $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2$ est

le $j^{\text{ème}}$ terme diagonal de la matrice ${}^t\bar{A} A$. On en déduit que $\langle A, A \rangle$ est la somme des carrés des normes-2 des vecteurs colonnes de A . Cette somme est toujours ≥ 0 , et elle est nulle si et seulement si la matrice A est nulle.

Exercice 3. Montrer que les groupes $U(n)$ et $SU(n)$ sont compacts. Les groupes $GL(n, \mathbb{C})$ et $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) ; \det M = 1\}$ sont-ils compacts ?

La méthode pour démontrer la compacité de $U(n)$ est la même qu'à la planche 9. Quant à $SU(n)$, c'est l'intersection de $U(n)$ avec le fermé $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; \det A = 1\}$, c'est donc un fermé borné c'est à dire un compact. Les deux autres ensembles ne sont pas compacts : ils ne sont pas bornés.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien et x_0 un vecteur fixé de E . Montrer que l'application définie par $u(x) = \langle x, x_0 \rangle x_0$ est un endomorphisme symétrique. Reconnaitre u dans le cas où le vecteur x_0 est de norme 1.

L'application u est linéaire puisque le produit scalaire est bilinéaire. Elle est aussi symétrique parce que

$$\langle u(x), y \rangle = \langle \langle x, x_0 \rangle x_0, y \rangle = \langle x, x_0 \rangle \langle x_0, y \rangle$$

est égal à

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle x, \langle y, x_0 \rangle x_0 \rangle = \langle y, x_0 \rangle \langle x, x_0 \rangle.$$

Si $\|x_0\|_2 = 1$ (c'est à dire $\langle x_0, x_0 \rangle = 1$), alors u est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par x_0 .

Exercice 5. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt montrer que

① **toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ se découpe de façon unique en $A = UT$ où $U \in O(n)$ et T est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels et > 0 .**

Appelons $V_1, V_2, \dots$ les vecteurs colonnes de A . Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet d'obtenir des vecteurs orthogonaux entre eux, et de norme 1, de la forme

$$W_1 = \alpha_{11} V_1$$

$$W_2 = \alpha_{12} V_1 + \alpha_{22} V_2$$

...

donc la matrice $U = A \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ 0 & \alpha_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ a pour colonnes les W_i et

par conséquent elle appartient à $O(n)$. Soit T l'inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ 0 & \alpha_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix};$$
 elle est aussi triangulaire supérieure et satisfait $A = UT$.

② toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ se découpe de façon unique en $A = UT$ où $U \in U(n)$ et T est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels et > 0 .

La méthode est la même que dans le cas précédent. Les termes diagonaux sont réels parce qu'ils proviennent de la normalisation des vecteurs de base (préalablement orthogonalisés).

Exercice 6. Soit E un espace hermitien et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout endomorphisme hermitien u à valeurs propres ≥ 0 il existe un unique endomorphisme hermitien v à valeurs propres ≥ 0 tel que $u = v^k$.

D'après le théorème de réduction des endomorphismes hermitiens, la matrice de u dans une base orthonormale appropriée est diagonale. Or toute matrice diagonale à termes diagonaux $\lambda_i \geq 0$ est évidemment la puissance $k^{\text{ième}}$ de la matrice diagonale de termes diagonaux $(\lambda_i)^{1/k}$.