Licence de mathématiques-L3	Année 2007-2008

Algèbre et géométrie

Corrigé de la feuille 11

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Montrer que le groupe $GL(E)$ agit naturellement sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E ;

_ préciser les orbites et leur nombre ;

_ décrire les stabilisateurs ;

_ cette action est-elle transitive ? fidèle ?

$GL(E)$ agit sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, c'est à dire à tout $u \in GL(E)$ on peut faire correspondre une application de l'ensemble $\{F \; ; \; F$ sous-espace vectoriel de $E\}$ dans lui même. L'image de F par cette application est notée $u \cdot F$, et la façon la plus naturelle de la définir est de poser

$$u \cdot F = u(F).$$

Les deux conditions à vérifier sont : $u \cdot (u' \cdot F) = (u \circ u') \cdot F$ (évident, ils sont égaux à $u(u'(F))$), et $Id_E \cdot F = F$ ($Id_E(F)$ est égal à F).

_ L'orbite de F, c'est à dire $\{u \cdot F) \; ; \; u \in GL(E)\}$, est égal dans le cas présent à $\{u(F) \; ; \; u \in GL(E)\}$ c'est à dire à l'ensemble de tous les sous-espaces de même dimension que F (puisqu'il existera toujours un automorphisme de E qui transforme une base de F en une base d'un sous-espace de même dimension). Il y a $n+1$ orbites ($0 \leq \mathrm{dimF} \leq n$).

_ Le stabilisateur de F, c'est à dire $\{u \in GL(E) \; ; \; u \cdot F = F\}$, est ici égal à l'ensemble des automorphismes de E qui laissent stable le sous-espace F.

_ Cette action n'est pas transitive puisqu'il existe plusieurs orbites (sauf si E est de dimension 0). Elle n'est pas fidèle puisqu'il existe des automorphismes $u \neq Id_E$ qui stabilisent tous les sous-espaces F : ce sont les λId_E avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 2. Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{R}) \times GL_m(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$;

_ identifier les orbites et leur nombre ;

_ cette action est-elle transitive ? fidèle ?

On a bien $(P, Q) \cdot ((R, S) \cdot A) = ((P, Q)(R, S)) \cdot A$ (encore faut-il définir $(P, Q)(R, S)$: c'est (PR, QS)), et on $a(I_n, I_m) \cdot A = A$.

- *L'orbite de A est l'ensemble de toutes les matrices B de même rang que A (puisqu'il existe alors P et Q inversibles telles que $B = PAQ^{-1} = (P,Q)\cdot A$). Il y a $\min(m,n)+1$ orbites.*
- *L'action n'est pas transitive puisque les matrices A ont au moins une ligne et une colonne et par conséquent $\min(m,n)+1 \geq 1+1 = 2$. Elle n'est pas fidèle : les $(\lambda I_n, \lambda I_n)$ stabilisent toutes les matrices A.*

Exercice 3. Montrer que le groupe $O(\mathbb{R}^3)$ agit naturellement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$;
- **préciser les orbites ;**
- **identifier les stabilisateurs ;**
- **cette action est-elle transitive ? fidèle ?**

L'action la plus naturelle de $O(\mathbb{R}^3)$ sur la sphère unité S est définie par

$$u \cdot x = u(x) \quad (x \in S)$$

(autrement dit on associe à chaque $u \in O(\mathbb{R}^3)$ une application de S dans S, qui est la restriction de u à S).
- *L'orbite de x est S (compléter x en une base orthonormale $\{e_1 = x, e_2, e_3\}$ et définir u par $u(e_1) = y, u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_3$, pour chaque $y \in S$).*
- *Le stabilisateur de x est l'ensemble des $u \in O(\mathbb{R}^3)$ tels que $u(x) = x$.*
- *Cette action est transitive : il y a une seule orbite. Elle est fidèle : seule l'identité sur $\mathbb{R}^3$ stabilise tous les x de la sphère unité.*

Exercice 4. Montrer que le groupe $GL(\mathbb{R}^n)$ agit naturellement sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$;
- **préciser les orbites et les stabilisateurs ;**
- **cette action est-elle transitive ? fidèle ?**

Pour toute base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ on pose

$$u(\mathcal{B}) = \{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}.$$

- *L'orbite de $\mathcal{B}$ est l'ensemble de toutes les bases de $\mathbb{R}^n$. Le stabilisateur d'une base donnée n'a qu'un élément, c'est l'identité sur $\mathbb{R}^n$.*

L'action est transitive (il n'y a qu'une seule orbite) et fidèle (seule l'identité stabilise toutes les bases).

Exercice 5. Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que G agit sur lui-même par conjuguaison : $g \cdot x = gxg^{-1}$;

– **préciser les orbites et les stabilisateurs ;**

– **identifier les éléments de G dont l'orbite est réduite à un singleton et écrire l'équation aux classes.**

Dans le cas où $n = p^\alpha$ avec p premier et $\alpha \geq 1$, montrer que le centre de G n'est pas réduit à $\{e\}$.

On a bien $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ $(= gg'x(gg')^{-1})$ et $e \cdot x = x$.

– *L'orbite de x est l'ensemble des gxg^{-1} (pour tout $g \in G$). Le stabilisateur d'un $x \in G$ est l'ensemble des $g \in G$ tels que $gxg^{-1} = x$, c'est à dire $gx = xg$. C'est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x.*

– *On remarque que x appartient à l'orbite de x puisque $x = exe^{-1}$. L'orbite de x est réduite à un singleton si et seulement si $gxg^{-1} = x$ pour tout $g \in G$, ce qui fait $gx = xg$, c'est à dire x commute avec tous les éléments de G. On dit alors que x appartient au centre de G.*

Choisissons un élément unique dans chaque orbite. On obtient ainsi un sous-ensemble $G' \subset G$ tel que tout élément de G appartient à l'orbite d'un seul $x \in G'$. Dans l'équation aux classes :

$$\mathrm{card}E = \sum_{x \in G'} \mathrm{card}(\textit{orbite de } x) = \sum_{x \in G'} \frac{\mathrm{card}G}{\mathrm{card}(\textit{stabilisateur de } x)}$$

on a $E = G$ puisque G agit sur lui-même, et on peut donc diviser le premier et le troisième membre par $\mathrm{card}G$ *:*

$$1 = \sum_{x \in G'} \frac{1}{\mathrm{card}(\textit{stabilisateur de } x)}.$$

Dans le cas où $n = p^\alpha$ avec p premier et $\alpha \geq 1$, si le centre de G était réduit à $\{e\}$, le stabilisateur de chaque $x \neq e$ (c'est à dire le sous-groupe des éléments de G qui commutent avec x) serait distinct de G. L'équation aux classes peut s'écrire

$$1 - \frac{1}{\mathrm{card}(\textit{stabilisateur de } e)} = \sum_{x \in G' \setminus \{e\}} \frac{1}{\mathrm{card}(\textit{stabilisateur de } x)}$$

ce qui fait

$$1 - \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{x \in G' \setminus \{e\}} \frac{1}{p^{\beta(x)}}$$

où $p^{\beta(x)}$ est l'ordre du sous-groupe des stabilisateurs de x, avec $\beta < \alpha$. Ceci étant impossible, du fait que le premier membre est la fraction irréductible $\dfrac{p^\alpha - 1}{p^\alpha}$ tandis que le second est de la forme $\dfrac{N}{p^{\alpha-1}}$ avec N entier, le centre de G n'est pas réduit à $\{e\}$.