Licence de Mathématiques L_3
2007-2008

Algèbre, groupes et géométrie
Semaine 1 - Correction -

Ex1 → Si $E = F \oplus G$ et u est la projection sur F de direction G, on a $F = \mathrm{Im}(u)$ et $G = \mathrm{Ker}(u)$, donc bien l'égalité $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

→ L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ vérifie $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$.

Ex2 → Si $\sum F_i$ est directe et $x \in F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$, on a $x = \sum_{j \neq i} x_j$ avec $x_j \in F_j$, d'où $x - \sum_{j \neq i} x_j = 0$, ce qui implique $x = 0$ puisque $x \in F_i$ (unicité de la décomposition de 0).

→ Inversement, si la condition donnée est satisfaite, soit $x \in \sum F_i$ avec $x = x_1 + \dots + x_n$ où $x_i \in F_i$. Il suffit de se placer dans le cas où $x = 0$ et de m.q. chaque x_i est nul pour montrer l'unicité de l'écriture de x en $x = \sum x_i$. S'il existait un x_i non nul, on pourrait définir le plus grand des entiers k tels que $x_k \neq 0$. Désignant par i cet entier, on aurait $x_i = -\sum_{j < i} x_j$ et $x_i \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Ex3 Si $x = \sum x_j$ et $y = \sum y_j$ avec $x_j, y_j \in F_j$, alors $x + y = \sum (x_j + y_j)$, où $x_j + y_j \in F_j$, d'où $q_i(x+y) = x_i + y_i = q_i(x) + q_i(y)$; de même $q_i(\lambda x) = \lambda q_i(x)$, et $q_i \in \mathcal{L}(E)$. On a clairement $\mathrm{Ker}\, q_i = \sum_{j \neq i} F_j$ et $\mathrm{Im}\, q_i = F_i$. De plus, si $x \in F_i$, on a $u(x) = x$, d'où l'on déduit que $q_i^2 = q_i$. L'inclusion de $\mathrm{Ker}\, q_i$ et $\mathrm{Im}\, q_j$ donne $q_i \circ q_j = 0$ $(i \neq j)$; enfin $Id_E = \sum q_i$ est immédiat.

Ex4 On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, mais $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qu'on étend en dimension $n \geq 2$.

Ex5 i) On a $\boxed{(f_1 \dots f_n) = (e_1 \dots e_n) P}$.

ii) De l'égalité $x = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1 \dots f_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1 \dots e_n) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ on déduit $\boxed{X = PX'}$.

iii) On a $u(x)$ de vecteur colonne de coordonnées $\begin{cases} Y & \text{dans la base } \mathcal{B} \\ Y' & \mathcal{B}' \end{cases}$

où $Y = AX$ et $Y' = A'X'$.
Ainsi $Y = PY' = AX = APX'$, d'où $Y' = [P^{-1}AP]\, X'$, et $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

Ex6 → Si M est inversible dans $\mathcal{M}_n(A)$, il existe une matrice M' de $\mathcal{M}_n(A)$ telle que $MM' = I_n$.

Alors $\det(MM') = \det(M) \cdot \det(M') = 1$, ce qui montre que $\det(M)$ est inversible dans A, d'inverse $\det(M')$.

→ Inversement, si $\det(A)$ est inversible dans A, l'égalité
$A \cdot {}^t\mathrm{Com}\,A = {}^t\mathrm{Com}\,A \cdot A = \det A . I_n$ montre que
$[\det(A)]^{-1} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A)$ est l'inverse de A.

Ex7 Soit $\varphi : E^n \to K$ une forme n-linéaire sur E.

→ Si φ est alternée, càd si $\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = 0$ dès que $x_i = x_j$
pour un certain couple (i,j) d'indice, on a
$\varphi(x_1, \dots, \underset{\text{rg } i}{x_i + x_j}, \dots, \underset{\text{rg } j}{x_i + x_j}, \dots, x_n) = 0 = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j \dots) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i \dots)$

et φ est antisymétrique.

→ Inversement, si φ est antisymétrique, et si $x = (x_1, \dots, x_n)$
avec $x_i = x_j$, on a $\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$,
$= - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$

d'où $2\,\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, soit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ si K n'est pas de caractéristique 2.