L_3 2007 - 2008

Algèbre, groupes et géométrie

Feuille n° 2 correction 1), 2) et 4)

1) Comme $A-(a-1)I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, on a $\operatorname{rg}\left[A-(a-1)I_n\right]=1$.

Sous l'hypothèse (autrice dans l'énoncé ...) $n \geq 2$, on a donc $A-(a-1)I_n$ non inversible, et $a-1$ v.p. de A.

De plus, $E_{a-1} = \ker\left[A-(a-1)I_n\right]$ est de dimension $n - \operatorname{rg}\left[A-(a-1)I_n\right] = n-1$.

2) On rappelle qu'un mineur de A obtenu en conservant les lignes et les colonnes de A de mêmes indices est dit mineur principal d'ordre k de A. Rappelons également que si $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n[\mathbb{A}]$, $\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}$.

On en déduit que $P_A(X) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-X & \cdots & & \\ a_{21} & a_{22}-X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-X \end{pmatrix}$ admet

- comme terme en X^n le monôme $(-1)^n X^n$ obtenu pour $\sigma = Id \in S_n$ en développant $\prod(a_{ii}-X)$;
- comme terme en X^{n-1} le monôme $(-1)^{n-1}\sum a_{ii}$, obtenu aussi pour $\sigma = Id \in S_n$ en développant $\prod(a_{ii}-X)$;
- comme terme constant $\det A$, obtenu en faisant $X=0$.

Plus généralement, le terme en X^{n-k} est obtenu en considérant les permutations σ de S_n ayant au moins $n-k$ points fixes j (valeurs vérifiant $\sigma(j)=j$), d'où la somme des termes

$$\varepsilon(\tau)\, a_{d_1\tau(d_1)}\cdots a_{d_k\tau(d_k)}(-X)^k,$$

étendue à tous les choix de $n-k$ points fixes pour $\sigma \in S_n$, et en considérant $\tau = \sigma_{/\{1,\dots,n\}\setminus\{n-k \text{ pts fixes désignés}\}}$.

Cette somme vaut exactement le mineur principal d'ordre k obtenu en ne gardant les lignes et colonnes d'indices les $n-k$ points fixes désignés d'avance. Pour $k=n-1$ on obtient ainsi, comme terme de degré X, $-\operatorname{tr}(\operatorname{com} A)\, X$.

4) S'il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, on obtient en conjuguant $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, et réciproquement $AY = \overline{\lambda} Y$ entraîne $A\overline{Y} = \lambda \overline{Y}$, d'où l'égalité $E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_\lambda}$.