Licence de mathématiques L_3 2007 - 2008

Algèbre, groupes et symétrie.

E désigne un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et r l'indice de u. M.q r vérifie la propriété

$$E = \mathrm{Im}\, u^0 \supsetneq \mathrm{Im}\, u \supsetneq \dots \supsetneq \mathrm{Im}\, u^r = \mathrm{Im}\, u^{r+1} = \mathrm{Im}\, u^{r+2} = \dots$$

2) Dans cet exercice, on suppose que $K = \mathbb{C}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; m.q A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.
(pour la condition suffisante on montrera que toutes les v.p. de u sont nulles par l'absurde et on trigonalisera u).

3) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que uv est nilpotent.
M.q. vu est nilpotent.

4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p (ie $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$).

a) M.q. $p \leq n$.

b) M.q. si $\ker u^i \neq E$ alors $\ker u^i \neq \ker u^{i+1}$.

c) M.q. les conditions suivantes sont équivalentes :

① $p = n$,
② pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, on a $\dim \ker u^k = k$,
③ il existe $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que $\dim \ker u^k = k$.

d) On suppose $p = n$. Soit F un sous-espace de E stable par u. M.q. il existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $F = \ker u^k$.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = 2A^2 - A$; m.q $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

6) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $B^p = A$.
M.q. A est diagonalisable ssi B est diagonalisable.