L_3 2007 - 2008 Groupes, algèbre et géométrie

Feuille d'exercices n° 5 - Indications.

1) En cours on a vu l'existence d'un réel r tel que

$$\ker u^0 \underset{\neq}{\subset} \ker u \underset{\neq}{\subset} \ker u^2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \ker u^r = \ker u^{r+1} = \ker u^{r+2} = \cdots$$

Le théorème du rang et les inclusions $\operatorname{Im} u^0 \supset \operatorname{Im} u \supset \cdots \supset \operatorname{Im} u^r \supset \cdots$ fait conclure.

(la démo au tableau n'était pas bien propre il faut que je la reprenne).

2) [Ref Gourdon p 204]

→ si A est nilpotente, sa seule v.p est nulle. Or $\operatorname{tr}(A)$ vaut la somme des v.p de A comptées avec leur multiplicité (trigonaliser A); donc $\operatorname{tr}(A)=0$. Comme les A^k pour $k \geq 1$ sont également nilpotentes, on a $\operatorname{tr}(A^k)=0$.

→ si maintenant $\operatorname{tr}(A^k)=0$ pour $k=1,\dots,n$, soit $P_A(X)=(-1)^n \prod_{i=1}^{q}(X-\lambda_i)^{d_i}$ où les d_i et les v.p (complexes) $\neq$ 2 à 2 de A. En trigonalisant A ($K=\mathbb{C}$!!), on voit comme ci-dessus que $\operatorname{tr} A^k = \boxed{\sum d_i \lambda_i^k = 0 \quad \text{pour } k=1,\dots,n}$

d'où l'idée de se ramener à un système de déterminant van der Monde pour conclure.

Raisonnant par l'absurde, on suppose alors les d_i non tous nuls, disons $d_1 \neq 0, \dots, d_s \neq 0$ (avec $s \leq r$), puis $d_{s+1} = \cdots = d_r = 0$.

On a donc $\sum_{i=1}^{s} d_i \lambda_i^k = 0$ pour $k=1,\dots,n$.

Or le système $\left[\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^k x_i = 0, \quad k=1,\dots,n \right]$ a un déterminant de van der Monde $\neq 0$ ($\forall \lambda_i \neq$ 2 à 2) et est homogène, en contradiction avec le fait que $(d_1,\dots,d_s)$ en est une solution. Ainsi les v.p de A sont toutes nulles, d'où A annulé par X^n.

3) Si $(uv)^k = 0$, alors $(vu)^{k+1} = v(uv)^k u = 0$.

5) La matrice A est annulée par $X(X-1)^2$, ce qui montre que $sp(A) \subset \{0,1\}$. En trigonalisant A on en déduit que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{N}$.

6) → Si B est diagonalisable, disons $B = P^{-1} D P$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale, alors $A = P^{-1} D^p P$ est diagonalisable.

→ Inversement, si A est diagonalisable, soit $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$ son polynôme minimal, où les λ_i sont $\neq$ 2 à 2.

On a donc $(A-\lambda_1 I_n)\cdots(A-\lambda_r I_n)=0$. $(*)$

Pour chaque $i \in \{1,\dots,r\}$, notons $\lambda_{i,1},\dots,\lambda_{i,p}$ les p racines $\neq$ 2 à 2 complexes de l'équation $x^p = \lambda_i$ ($\lambda_i \neq 0$ car $A \in GL_n(\mathbb{C})$).

Alors $(*)$ s'écrit $(B-\lambda_{1,1}X)\cdots(B-\lambda_{1,p}) \cdots (B-\lambda_{r,1}X)\cdots(B-\lambda_{r,p}X)=0$

, ce qui montre que B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples : ok.

4) C'est un exo de Tauvel — exos de maths pour l'agreg (masson) :

14. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in L(E)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, $u^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer que $p \leq n$.

b) Prouver que, si $\ker u^i \neq E$, alors $\ker u^i \neq \ker u^{i+1}$.

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p = n$.

(ii) Pour tout $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$, on a $\dim\ker u^k = k$.

(iii) Il existe $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ tel que $\dim \underset{\ker}{u^k} = k$.

d) On suppose $p = n$. Soit F un sous-espace u-stable de E. Prouver qu'il existe $k \in \{0,1,\dots,n\}$ tel que $F = \ker u^k$.

Nous noterons $N_i = \ker u^i$, $I_i = \mathrm{im}(u^i)$.

a) Soient $x \in E$, $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$u^{p-1}(x) \neq 0,\ \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1}u^{p-1}(x) = 0.$$

Appliquant u^{p-1} aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$. D'où $\lambda_0 = 0$. Recommençant avec u^{p-2}, il vient $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on voit que les λ_i sont tous nuls. Il en résulte que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est un système libre. Par suite, $p \leq n$.

b) On a $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $q < p$ tel que $N_q = N_{q+1}$. Alors $I_q = I_{q+1}$ et, pour $r \in \mathbb{N}$:

$$u^{q+r+1}(E) = u^r(I_{q+1}) = u^r(I_q) = u^{q+r}(E).$$

On en déduit $I_q = I_{q+r}$, $N_{q+r} = N_q$ pour $r \geq 0$. Comme $N_q \neq 0$ (car $q < p$), on trouve que u est non nilpotent. Contradiction.

c) (i) $\Rightarrow$ (ii) C'est clair car, si $p = n$, ce qui précède prouve que : $\{0\} \underset{\neq}{\subset} N_1 \underset{\neq}{\subset} N_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n = E$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $r \in \{1,2,\dots n-1\}$ tel que $\dim N_r = r$. On a donc $r < p$. D'après b) on a

$$\{0\} \underset{\neq}{\subset} N_1 \underset{\neq}{\subset} N_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} N_r \underset{\neq}{\subset} N_{r+1}.$$

En particulier, $\dim N_{r+1} \geq 1 + \dim N_r$, et $\dim N_1 = 1$. Alors :

$$\dim I_{r+1} = \dim I_r - \dim(N_1 \cap I_r) \geq \dim I_r - \dim N_1 = \dim I_r - 1.$$

On en déduit $\dim N_{r+1} \leq \dim N_r + 1$, puis $\dim N_{r+1} = \dim N_r + 1$. De proche en proche, on obtient alors (i).

d) On peut supposer $\dim F = q > 0$. Soit $v = u|F$. On a

$$v^n = 0,\quad \{0\} \underset{\neq}{\subset} \ker v \subset \ker u.$$

D'après c), on a $\dim\ker v = \dim N_1 = 1$. Toujours d'après c), on a $\dim F = \dim\ker v^q$, et $k = \dim\ker v^k$ pour $0 \leq k \leq q$. Comme $\dim\ker u^k = k$ si $0 \leq k \leq n$, et $\ker v^k \subset \ker u^k$, il vient $F = \ker v^q = \ker u^q$.