

Algèbre et géométrie

Corrigé de la feuille 6

Rappel : On appelle matrice de Jordan (à coefficients complexes) une matrice diagonale par blocs, de la forme

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{B_{p_{1,1}}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \boxed{B_{p_{s_1,1}}} & & & & & & \\ & & & \boxed{B_{p_{1,2}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \boxed{B_{p_{s_2,2}}} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \boxed{B_{p_{1,r}}} & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \boxed{B_{p_{s_r,r}}} \end{pmatrix} \quad (0)$$

où les $p_{i,j}$ sont des entiers ≥ 1 , de même que les s_j , et les $B_{p_{i,j}}$ des matrices à $p_{i,j}$ lignes et $p_{i,j}$ colonnes de la forme

$$B_{p_{i,j}} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Les λ_j sont des nombres complexes distincts. Dans $B_{p_{i,j}}$ tous les termes diagonaux sont égaux à un même $\lambda_j \in \mathbb{C}$; ils ont un terme 1 à leur droite, sauf le λ_j d'en bas qui a un terme 0 à sa droite (dans J) puisque J est diagonale par blocs.

D'après le théorème du 7^{ème} cours tout endomorphisme (d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) est représenté, dans une certaine base, par une matrice de Jordan, avec

de plus la condition que les blocs relatifs à un même λ_j sont de plus en plus grands :

$$\forall j, p_{1,j} \leq p_{2,j} \leq \dots \leq p_{s_j,j}. \quad (*)$$

Ce qui revient à dire que toute matrice carrée à coefficients complexes est semblable à une matrice de Jordan vérifiant cette condition :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists J \text{ (matrice de Jordan)}, \exists P \text{ (matrice inversible)}, A = PJP^{-1}.$$

D'autre part le polynôme caractéristique de J est

$$P_J(X) = \det(J - XI_n) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r} \quad (**)$$

où $\alpha_j = \sum_{i=1}^{s_j} p_{i,j}$. Son polynôme minimal est

$$\pi_J(X) = (X - \lambda_1)^{p_{s_1,1}} \dots (X - \lambda_r)^{p_{s_r,r}} \quad (***)$$

si les $p_{i,j}$ vérifient la condition (*).

Exercice 1. Classifier, à une similitude près, toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. Dans chaque cas, préciser le polynôme caractéristique et le polynôme minimal correspondants.

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Jordan J , c'est à dire il existe une matrice P inversible telle que $A = PJP^{-1}$. Si A est nilpotente, J est aussi nilpotente puisque

$$J = P^{-1}AP \Rightarrow J^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP.$$

*Or si un des termes diagonaux λ_j de la matrice (triangulaire) J n'était pas nul, le terme diagonal λ_j^k dans la matrice J^k ne serait pas nul, ce qui empêcherait J d'être nilpotente. Il s'ensuit qu'il n'y a qu'un seul λ_j et que ce λ_j est nul : $\lambda_1 = 0$. D'après (**) le polynôme caractéristique de A (ou de J) est*

$$P_A(X) = -X^5.$$

Finalement les matrices $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ nilpotentes sont semblables à une matrice de Jordan de la forme suivante (compte tenu de la condition ()) :*

1^{er} cas, si la taille des blocs $B_{p_{i,1}}$ ne dépasse pas 2, A est semblable à

$$J_1 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_3 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

et d'après (***) le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = X$ (pour le premier cas) et $\pi_A(X) = X^2$ (dans les deux autres cas).

2^{ème} cas, si la taille du plus grand bloc $B_{p_{i,1}}$ est 3, A est semblable à

$$J_4 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_5 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'après (***) le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = X^3$.

3^{ème} cas, si la taille du plus grand bloc $B_{p_{i,1}}$ est 4 ou 5, A est semblable à

$$J_6 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_7 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'après (***) le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = \pi_{J_6}(X) = X^4$ ou $\pi_A(X) = \pi_{J_7}(X) = X^5$.

Il y a donc 7 classes de matrices $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ nilpotentes, compte tenu que J_2 et J_3 ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables, et J_4 et J_5 ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables.

Exercice 2. En discutant suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les sous-espaces caractéristiques et donner une forme réduite de Jordan (en précisant une matrice de passage) de la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(\alpha + 4) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule d'abord

$$P_A(X) = \det(A - XI_4) = (X - 1)^4.$$

Puis on calcule successivement les matrices $(A - I_4)^1, (A - I_4)^2, (A - I_4)^3, (A - I_4)^4$ de façon à trouver le polynôme minimal. On s'aperçoit que $(A - I_4)^2 = 0$ et le polynôme minimal est donc

$$\pi_A(X) = (X - 1)^2.$$

Le seul sous-espace caractéristique est $M_1 = \ker(u_A - Id_{\mathbb{C}^4})^2$ (en appelant u_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ défini par $u_A(V) = AV$ pour tout $V \in \mathbb{C}^4$).

Mais comme $(A - I_4)^2 = 0$, ce sous-espace caractéristique est

$$M_1 = \ker(0) = \mathbb{C}^4.$$

Par contre il faut déterminer le sous-espace propre $E_1 = \ker(u_A - Id_{\mathbb{C}^4})$. En effet, pour construire une base où la matrice de u_A est de Jordan, il faut commencer par choisir des vecteurs linéairement indépendants dans $M_1 \setminus E_1$ (le nombre de vecteurs qu'on doit choisir est $\dim(M_1) - \dim(E_1)$).

Cas $\alpha \neq 0$, on trouve que E_1 est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

par conséquent on peut choisir comme vecteurs de base les deux les plus simples (dans $M_1 \setminus E_1$) :

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis on pose

$$e_1 = (u_A - Id_{\mathbb{C}^4})(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = (u_A - Id_{\mathbb{C}^4})(e_4) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2 \\ -\alpha - 4 \end{pmatrix},$$

parce que ces égalités équivalent à $u_A(e_2) = e_1 + e_2$ et $u_A(e_4) = e_3 + e_4$, et parce qu'elles impliquent $e_1, e_3 \in \ker(u_A - Id_{\mathbb{C}^4})$, d'où une matrice de Jordan :

$$J = \mathcal{Mat}(u_A, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La matrice de passage (de la base canonique à $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$) a pour colonnes les vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -\alpha - 4 & 0 \end{pmatrix}$$

et les relations entre la matrice A et la matrice J sont $A = PJP^{-1}$ et $J = P^{-1}AP$.

Cas $\alpha = 0$, on trouve que E_1 est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

il faut donc choisir un seul vecteur de base $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis poser

$\varepsilon_3 = (u_A - \text{Id}_{\mathbb{C}^4})(\varepsilon_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et compléter par deux vecteurs propres :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de u_A dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ est

$$J = \mathcal{M}at(u_A, \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage (de la base canonique à $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$) a pour colonnes les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut toujours vérifier que $A = PJP^{-1}$ et $J = P^{-1}AP$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ telle que

$$P_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2 \quad \text{et} \quad \pi_A(X) = (X - 1)^2(X - 2).$$

Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de A ? Quelles sont les matrices réduites de Jordan possibles pour A ?

Pour trouver les dimensions des sous-espaces propres de A (c'est à dire des sous-espaces de vecteurs propres), il suffit de déterminer les vecteurs propres de sa matrice réduite de Jordan. On va donc commencer par déterminer cette matrice. Elle est composée de blocs $B_{p_{1,1}}, \dots, B_{p_{s_1,1}}$ (dont les termes diagonaux sont égaux à la valeur propre $\lambda_1 = 1$) et de blocs $B_{p_{1,2}}, \dots, B_{p_{s_2,2}}$ (dont les termes diagonaux sont égaux à la valeur propre $\lambda_2 = 2$). D'après le polynôme minimal, le plus grand bloc de la première liste est de taille 2 et les blocs de la seconde liste sont de taille 1. La réduite de Jordan de A est donc (compte tenu de la condition (*))

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Cependant la première est semblable à la troisième, et la deuxième à la quatrième.

On calcule facilement les vecteurs propres de J (c'est à dire les vecteurs $V \in \mathbb{C}^6$ tels que $JV = V$ ou $JV = 2V$). On obtient que la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre 1 est 3 dans le premier et troisième cas, elle est 2 dans le deuxième et quatrième cas, et la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre 2 est 2 dans les quatre cas.