Licence de mathématiques-L3	**Année 2007-2008**

Algèbre et géométrie

Corrigé (simplifié) de la feuille 7

Les exercices 1 à 4 détaillent une méthode pratique pour obtenir la décomposition de Dunford d'un endomorphisme u (c'est à dire pour trouver l'endomorphisme diagonalisable d et l'endomorphisme nilpotent n tels que $u = d + n$) sans avoir à trigonaliser préalablement la matrice de u. De plus cette méthode permet de calculer d et n en fonction de u.

La matrice de l'exercice 5 servira pour illustrer cette méthode.

Exercice 1. Soit p_i la projection sur le sous-espace caractéristique M_i , suivant la direction $\bigoplus_{j\neq i} M_j$. Exprimer d en fonction des p_i et des λ_i.

p_i est la projection sur M_i , c'est à dire pour tout $x \in E$ les $p_i(x)$ sont les uniques éléments de M_i tels que

$$x = \sum_i p_i(x). \qquad (*)$$

D'après le théorème de Dunford les éléments de M_i sont vecteurs propres de l'endomorphisme d et on a donc

$$d(x) = \sum_i d(p_i(x)) = \sum_i \lambda_i p_i(x).$$

Cette égalité ayant lieu pour tout $x \in E$ on peut écrire plus simplement

$$d = \sum_i \lambda_i p_i \ .$$

Exemple : Calculons le polynôme caractéristique et les sous-espaces caractéristiques de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice 5 (qui sont aussi ceux de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, défini par $u(V) = MV$) :

$$P_M(X) = (X-2)^2(X-3), \quad M_1 = \ker(u-2Id_{\mathbb{R}^3})^2 \quad et \quad M_2 = \ker(u-3Id_{\mathbb{R}^3}).$$

La formule $d = \sum_i \lambda_i p_i$ devient $d = 2p_1 + 3p_2$.

Exercice 2. On considère un polynôme $P(X) = \prod_i (X-\lambda_i)^{\gamma_i}$ annulateur de u (c'est à dire les γ_i sont au moins égaux aux β_i du polynôme minimal $\pi_u(X) = \prod_i (X-\lambda_i)^{\beta_i}$). Démontrer que $M_i = \ker(u-\lambda_i Id_{M_i})^{\gamma_i}$.

Les $\ker(u-\lambda_i Id_E)^k$ sont égaux pour tout $k \geq \beta_i$, donc $M_i = \ker(u-\lambda_i Id_E)^{\beta_i}$ est égal à $\ker(u-\lambda_i Id_E)^{\gamma_i}$. On peut remplacer Id_E par Id_{M_i} (identité sur M_i), puisque s'agissant des éléments x du sous-espace M_i stable par $u-\lambda_i Id_{M_i}$ on a bien $(u-\lambda_i Id_E)^k(x) = (u-\lambda_i Id_{M_i})^k(x)$ pour tout k.

Exercice 3. Il s'agit de déduire de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_i \sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}$$

une identité de Bezout pour les polynômes $Q_i(X) = \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{\gamma_j} = \dfrac{P(X)}{(X-\lambda_j)^{\gamma_j}}$.

En réduisant au même dénominateur $\sum_{j=1}^{\gamma_i} \dfrac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}$ on obtient $\dfrac{\sum_{j=1}^{\gamma_i} x_{i,j}(X-\lambda_i)^{\gamma_i-j}}{(X-\lambda_i)^{\gamma_i}}$.

Appelons $U_i(X)$ le polynôme $\sum_{j=1}^{\gamma_i} x_{i,j}(X-\lambda_i)^{\gamma_i-j}$, on a donc

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_i \frac{U_i(X)}{(X-\lambda_i)^{\gamma_i}} \ .$$

Finalement

$$1 = \sum_i \frac{U_i(X)}{(X-\lambda_i)^{\gamma_i}} P(X) = \sum_i U_i(X) Q_i(X)$$

c'est à dire les $U_i(X)$ vérifient l'identité de Bezout associée aux $Q_i(X)$.

Exemple : On choisit d'abord le polynôme annulateur $P(X)$, qu'on prend égal au polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-3)$. D'où $Q_1(X) = X-3$ et $Q_2(X) = (X-2)^2$. Puis on décompose en éléments simples

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-2)^2(X-3)} &= -\frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X-3} \\ &= \frac{1-X}{(X-2)^2} + \frac{1}{X-3} \end{aligned}$$

puis on multiplie par $(X-2)^2(X-3)$, ce qui fait

$$\begin{aligned} 1 &= (1-X)(X-3) + (X-2)^2 \\ &= (1-X)Q_1(X) + Q_2(X). \end{aligned}$$

Les polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ vérifient donc l'identité de Bezout avec $U_1(X) = 1 - X$ et $U_2(X) = 1$.

Exercice 4. La finalité de cette question est de démontrer que l'endomorphisme $v_i = U_i(u) \circ Q_i(u)$ est égal à la projection p_i .

À l'égalité des polynômes $1 = X^0 = \sum_i U_i(X)Q_i(X)$ correspond une égalité des polynômes d'endomorphisme :

$$u^0 = \sum_i U_i(u) \circ Q_i(u) \quad \text{c'est à dire} \quad Id_E = \sum_i v_i \ . \qquad (**)$$

Tout élément $x \in E$ s'écrit donc $x = Id_E(x) = \sum_i v_i(x)$. Mais $v_i(x)$ appartient à M_i puisque (d'après la commutativité des polynômes en u)

$$\begin{array}{rcl} (u-\lambda_i Id_E)^{\gamma_i}(v_i(x)) & = & \big((u-\lambda_i Id_E)^{\gamma_i} \circ v_i\big)(x) \\ & = & \big((u-\lambda_i Id_E)^{\gamma_i} \circ U_i(u) \circ Q_i(u)\big)(x) \\ & = & \big(U_i(u) \circ (u-\lambda_i Id_E)^{\gamma_i} \circ Q_i(u)\big)(x) \\ & = & \big(U_i(u) \circ P(u)\big)(x)) \end{array}$$

est nul, le polynôme P étant annulateur de u.
D'après $(*)$ et $(**)$ on a deux décompositions des vecteurs $x \in E$:

$$x = \sum_i v_i(x) = \sum_i p_i(x) \quad \text{avec } v_i(x) \in M_i \text{ et } p_i(x) \in M_i$$

d'où (sachant que la décomposition relative à une somme directe est unique)

$$\forall i, \ v_i = p_i.$$

Exemple : Pour la matrice de l'exercice 5 on a $p_1 = v_1 = (Id_E - u) \circ (u - 3Id_E)$ et $p_2 = v_2 = (u - 2Id_E)^2$ d'où

$$d = 2p_1 + 3p_2 = u^2 - 4u + 6Id_E \quad \text{et} \quad n = u - d = -u^2 + 5u - 6Id_E.$$

Les matrices de d et n sont

$$D = M^2 - 4M + 6I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -6 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = -M^2 + 5M - 6I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$