

feuille 8

Écrivez un espace vectoriel normé dimension finie $n \geq 1$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) i) M.q. $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$.

ii) Soient $A \in GL_n(K)$ et $B \in M_n(K)$; m.q. $P_{AB} = P_{BA}$.

iii) Idem en ne supposant plus que $A \in GL_n(K)$.

2) Soit $n \geq 1$, et p.t. que $1 \leq p \leq n-1$.

M.q. $\{A \in M_n(\mathbb{R}); \operatorname{rg}(A) \leq p\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
(montrer que son complémentaire est ouvert).

3) M.q. l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

(pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, commencer par triangulariser M , puis ex. écrire une suite de matrices diagonalisables tendant vers M).

4) i) Quelle est l'adhérence dans $\mathcal{L}(E)$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{L}(E)$?

ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; en considérant $K[u] = \{P(u); P \in K[X]\}$, m.q. il existe $P \in K[X]$ tel que $\exp(u) = P(u)$.

5) Reprenez la question 5 de la feuille 7, et utilisez la décomposition de Jordan de M pour calculer $\exp(M)$.