Licence de mathématiques-L3	Année 2007-2008

Algèbre et géométrie

Corrigé de la feuille 9

Dans ce qui suit E (de dimension n) est euclidien, c'est à dire muni d'un produit scalaire qu'on notera $< x, y >$.

Exercice 1. Caractériser les projections vectorielles de E dans E appartenant à $O(E)$. Idem pour les symétries vectorielles.

On sait que les $u \in O(E)$ ont pour déterminant 1 ou -1 ; ce sont donc des automorphismes et par conséquent $\mathrm{Im}u$ *est égal à E. Si l'un d'entre eux est aussi une projection, il vérifie (par définition des projections) $u^2 = u$, ce qui se traduit par*

$$\forall x \in E,\ u \circ u(x) = u(x)$$

et équivaut à

$$\forall y = u(x) \in \mathrm{Im}u,\ u(y) = y.$$

Mais alors u est l'identité sur E puisque tous les éléments de E appartiennent à $\mathrm{Im}u$*. Donc Id_E est la seule projection qui appartient à $O(E)$.*

Rappelons qu'une symétrie est un endomorphisme s qui vérifie $s^2 = Id_E$. On sait qu'il existe alors deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E_1 et E_2 tels que

$$\forall x_1 \in E_1,\ \forall x_2 \in E_2,\ s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2\ ,$$

ce qui justifie que s s'appelle "symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2". La condition pour que s appartienne à $O(E)$ est

$$\forall x, y \in E,\ < s(x), s(y) >=< x, y > . \qquad (*)$$

Décomposons x et y dans la somme directe $E = E_1 \bigoplus E_2$: on a $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ et, le produit scalaire étant bilinéaire,

$$< x, y >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 > .$$

De même,

$$< s(x), s(y) >=< x_1 - x_2, y_1 - y_2 >=< x_1, y_1 > - < x_1, y_2 > - < x_2, y_1 > + < x_2, y_2 >$$

et la condition $(*)$ se simplifie : elle équivaut à

$$\forall x_1, y_1 \in E_1,\ \forall x_2, y_2 \in E_2,\ < x_1, y_2 > + < x_2, y_1 >= 0. \qquad (**)$$

Elle implique (en faisant $y_1 = x_2 = 0$)

$$\forall x_1 \in E_1,\ \forall y_2 \in E_2,\ < x_1, y_2 >= 0$$

c'est à dire E_1 est orthogonal à E_2. Réciproquement si E_1 est orthogonal à E_2 alors la condition $(**)$ est vérifiée.
Donc une symétrie s appartient à $O(E)$ si et seulement si E_1 est orthogonal à E_2 (rappelons que $E_1 = \ker(s - Id_E) = \mathrm{Im}(s + Id_E)$ et $E_2 = \ker(s + Id_E) = \mathrm{Im}(s - Id_E)$).

Exercice 2. Soit $u \in O(E)$ et $v = u - Id_E$.
i) Montrer que $\mathrm{Im}v$ et $\ker v$ sont supplémentaires orthogonaux.

Pour tout élément $v(x)$ de $\mathrm{Im}v$ et tout élément y de $\ker v$ (c'est à dire tout $y \in E$ tel que $v(y) = 0$) on a

$$\begin{aligned} < v(x), y > &= < u(x) - x, y > \\ &= < u(x), y > - < x, y > \\ &= < u(x), y > - < u(x), u(y) > \\ &= < u(x), y - u(y) > \\ &= < u(x), -v(y) > \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}v$ est orthogonal à $\ker v$.
Vérifions qu'ils sont aussi supplémentaires : l'égalité $\mathrm{Im}v \cap \ker v = \{0\}$ est une conséquence de l'orthogonalité. Quant à l'égalité $\mathrm{Im}v + \ker v = E$ elle se déduit du théorème du rang, d'après lequel toute application linéaire définie sur E vérifie

$$\dim(\mathrm{Im}v) + \dim(\ker v) = \dim E.$$

Cette égalité devient (dans le cas présent où $\mathrm{Im}v \cap \ker v = \{0\}$)

$$\dim(\mathrm{Im}v + \ker v) = \dim E$$

Puis, $\mathrm{Im}v + \ker v$ étant un sous-espace de E de même dimension que E, il est égal à E.

(ii) Soit $f_n = \dfrac{1}{n}(Id_E + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ tend, au sens de la convergence simple, vers la projection orthogonale sur $\ker v$.

En appelant p_1 la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}v$ et p_2 la projection orthogonale sur $\ker v$ on a

$$\forall x \in E,\ x = p_1(x) + p_2(x) \Rightarrow f_n(x) = f_n(p_1(x)) + f_n(p_2(x)). \qquad (***)$$

Le vecteur $p_1(x)$ *appartient à* $\mathrm{Im}v$, *il existe donc* $y \in E$ *tel que*

$$p_1(x) = v(y) = u(y) - y$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} f_n(p_1(x)) &= \frac{1}{n}(Id_E + u + \cdots + u^{n-1})(u(y) - y) \\ &= \frac{1}{n}(u(y) + u^2(y) + \cdots + u^n(y) - y - u(y) - \cdots - u^{n-1}(y) \\ &= \frac{1}{n}(u^n(y) - y). \end{aligned}$$

Démontrons que $f_n(p_1(x))$ *tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$. *La norme de* $u^n(y)$ *ne dépend pas de* n *: elle est égal à celle de* y *puisque* $u \in O(E)$. *On en déduit (par l'inégalité triangulaire) que* $u^n(y) - y$ *est borné indépendamment de* n *et par conséquent* $f_n(p_1(x))$ *tend vers* 0.

Démontrons que $f_n(p_2(x)) = p_2(x)$. *Le vecteur* $p_2(x)$ *appartient à* $\ker v$ *donc* $v(p_2(x)) = 0$ *c'est à dire* $u(p_2(x)) = p_2(x)$, *d'où on déduit* $u^k(p_2(x)) = p_2(x)$ *pour tout* k *et finalement* $f_n(p_2(x)) = \dfrac{1}{n}(p_2(x) + \cdots + p_2(x)) = p_2(x)$. *L'égalité* $(***)$ *implique donc bien que* $f_n(x)$ *tend vers* $p_2(x)$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 3. Utiliser le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux pour faire leur classification pour $\dim E = n$ **quand** $n = 2$**, puis** $n = 3$**.**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *la matrice d'un endomorphisme orthogonal (en dimension* 2*), dans une base orthonormale. Comme la colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *est de norme* 1, *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

La deuxième colonne est aussi de norme 1, *et elle est orthogonale à la première ; or il existe deux vecteurs qui vérifient ces deux condition, ce sont* $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$. *Les endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension* 2 *sont donc ceux qui ont pour matrice (dans une base orthonormale quelconque)*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

En dimension 3 *on utilise le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux : il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de* $u \in O(E)$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ou \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ou \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ou \; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$ou \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \; ou \; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Montrer que $O(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$O(n)$ est l'ensemble des matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

telles que pour tout j la somme $s_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij})^2$ vaut 1 et, pour tout couple (j, j') avec $j \neq j'$, la somme $s_{j,j'} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'}$ vaut 0. Or l'application f définie (sur l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) par

$$f(A) = (s_1, \dots, s_n, s_{1,1}, \dots, s_{1,n}, s_{2,1}, \dots, s_{2,n}, \dots, s_{n,1}, \dots, s_{n,n})$$

est continue. L'ensemble $O(n) = f^{-1}\{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)\}$ est donc fermé. Comme il est ausi borné (la norme-2 des colonnes des matrices $A \in O(E)$ étant 1), il est est compact.

Exercice 5. i) Est-ce que $O(n)$ est connexe ?

Non puisque son image par l'application continue det *est l'ensemble non connexe $\{-1, 1\}$.*

ii) Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs, puis que $SO(n)$ et $O(n) \setminus SO(n)$ sont les composantes connexes de $O(n)$.

D'après le théorème de réduction des endomprphismes orthogonaux, toute matrice $A \in O(n)$ est de la forme

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & (0) & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & R(\theta_1) & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & R(\theta_t) \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec P matrice inversible et $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Remarquons que $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc les termes -1 de la diagonale de la grande matrice peuvent être regroupés deux par deux pour former des $R(\pi)$.
Si $A \in SO(n)$, son déterminant est 1, donc les termes -1 sont en nombre pair sur la diagonale ; après les avoir regroupés deux par deux il n'en reste plus :

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & R(\pi) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & (0) & & & & R(\pi) & & & \\ & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_t) \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Cette matrice peut être reliée à la matrice unité par la courbe paramétrée définie (pour $x \in [0,1]$) par

$$A(x) = P\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & R(\pi x) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & (0) & & & & R(\pi x) & & & \\ & & & & & & R(\theta_1 x) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_t x) \end{pmatrix}P^{-1}$$

ce qui prouve que $SO(n)$ est connexe par arcs. Quant à $O(n) \setminus SO(n)$, il est aussi connexe par arcs : il est l'image de $SO(n)$ par l'application continue :

$$f : O(n) \to O(n), \quad f(A) = AS \quad (\textit{avec } S \in O(n) \setminus SO(n) \textit{ fixé}).$$