Licence de Mathématiques L3 — Année 2007-2008

Algèbre et géométrie

Problème 1 - Corrigé.

<u>Attention</u> erreur d'énoncé : dans la question 2) ii) il fallait lire Π_λ est un multiple de $(u-\mu Id_E)$ (et donc Π_μ de $(u-\lambda Id_E)$).

1) i) Le théorème de décomposition des noyaux donne $E = \ker(PQ(u)) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

ii) Si $x \in Im(P(u))$, disons $x = P(u)(y)$, alors $Q(u)(x) = Q(u)[P(u)(y)]$
$= (Q(u)\circ P(u))(y) = [PQ(u)](y) = 0$, et $x \in \ker Q(u)$.

Ainsi $Im\, P(u) \subset \ker Q(u)$.

Or, par le théorème du rang, on a $\dim \ker P(u) + \dim Im\, P(u) = n$,
mais par i) on a aussi $\dim \ker P(u) + \dim \ker Q(u) = n$.

On en déduit que $\dim \ker Q(u) = \dim Im\, P(u)$, ce qui, avec l'inclusion $Im\, P(u) \subset \ker Q(u)$, donne l'égalité $Im\, P(u) = \ker Q(u)$.

De la même façon, $Im\, Q(u) = \ker P(u)$.

2) i) Comme u est diagonalisable, les v.p. de u sont racines simples de Π_u :
$\Pi_u(X) = (X-\lambda)(X-\mu)$.

ii) Le polynôme minimal Π_u vérifie $\Pi_u(u)=0$, et on peut appliquer la question 1 avec $P(X) = (X-\lambda)$ et $Q(X) = (X-\mu)$:
$E = E_\lambda \oplus E_\mu$, avec $E_\lambda = \ker(u-\lambda Id_E) = Im(u-\mu Id_E)$
et $E_\mu = \ker(u-\mu Id_E) = Im(u-\lambda Id_E)$.

La projection Π_λ sur E_λ de direction E_μ a donc même noyau (c'est E_μ) et même image (c'est E_λ) que l'endomorphisme $(u-\mu Id_E)$.

Montrons qu'elle en est un multiple :
- si $x \in E_\lambda$, on a $(u-\mu Id_E)(x) = (\lambda-\mu)(x)$,
- si $x \in E_\mu$, on a $(u-\mu Id_E)(x) = 0$,

qui montre bien que $u-\mu Id_E = (\lambda-\mu)\,\Pi_\lambda$.

Ainsi $\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(u-\mu Id_E)$, et de même $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(u-\lambda Id_E)$.

3) i) Il suffit de calculer Π_λ et Π_μ. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base quelconque de E, $(\Pi_\lambda(e_1),\dots,\Pi_\lambda(e_n))$ est génératrice de $\Pi_\lambda(E) = E_\lambda$ et on peut en extraire une base de E_λ. De même pour Π_μ.

ii) <u>Exemple</u> : A représente un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$. On a $P_A(X) = (3-X)(-2-X)+4 = (X+1)(X-2)$, d'où -1 et 2 comme v.p. De plus $Mat_B(\Pi_{-1}) = -\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-1/3 & -2/3\\ 2/3 & 4/3\end{pmatrix}$,
et de même $Mat_B(\Pi_2) = \begin{pmatrix}4/3 & 2/3\\ -2/3 & -1/3\end{pmatrix}$, d'où $E_{-1} = Vect((-1,2))$ et $E_2 = Vect((2,-1))$.