Licence de mathématiques-L3	**Année 2007-2008**

Algèbre et géométrie

Corrigé du problème 2

Exercice 1. (examen de septembre 2004) Soit $SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$ **(matrices spéciales unitaires),** $\mathfrak{su}(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A +^t \overline{A} = 0,\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ **(matrices anti-hermitiennes de trace nulle), où** $U(n)$ **désigne le groupe des matrices unitaires d'ordre** n**. Montrer que**

1. Montrer que $SU(n) := \{\exp(A) \mid A \in \mathfrak{su}(n)\}$**.**

Indication : utiliser les théorèmes de diagonalisation.

Rappelons d'abord que toute matrice A *qui commute avec son adjointe* ${}^t\overline{A}$ *est diagonalisable en base orthonormale. C'est le cas en particulier des matrices* $A \in SU(n)$ *puisque leur adjointe est* ${}^t\overline{A} = A^{-1}$*, de même que les matrices* $A \in \mathfrak{su}(n)$ *dont l'adjointe est* ${}^t\overline{A} = -A$*.*

Les matrices diagonalisables en base orthonormale sont les matrices de la forme

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \qquad (*)$$

avec $P \in U(n)$ *c'est à dire* ${}^t\overline{P} = P^{-1}$*. Leur adjointe est donc*

$${}^t\overline{A} = P \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad (**)$$

Supposons maintenant $A \in SU(n)$*. D'après le cours, ses valeurs propres sont de module 1 ; il existe donc des* $\theta_k \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda_k = e^{i\theta_k}$ *pour tout* k*. On déduit de* $(*)$

$$A = \exp(B) \quad \textit{avec} \quad B = P \begin{pmatrix} i\theta_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & i\theta_n \end{pmatrix} P^{-1} \qquad (***)$$

puis, en appliquant $(**)$ *à la matrice* B*,*

$${}^t\overline{B} = P \begin{pmatrix} -i\theta_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & -i\theta_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On voit que $B + {}^t\overline{B} = 0$. *Quant à la condition* $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *elle se déduit de* $\det(A) = 1$. *La matrice* B *appartient donc à* $\mathfrak{su}(n)$.

La démonstration fonctionne en sens inverse : toute matrice $B \in \mathfrak{su}(n)$ *se met sous la forme* $(*)$, *plus précisément elle se met sous la forme* $(***)$ *en conséquence de la relation* $B + {}^t\overline{B} = 0$, *donc son exponentielle appartient à* $SU(n)$.

2. Montrer que $\{tA \mid t \in \mathbb{R},\ A \in SU(2)\} = \mathbb{R}I_2 + \mathfrak{su}(2)$**.**

Déterminons toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *qui appartiennent à* $SU(2)$, *c'est à dire qui vérifient :* $A\ {}^t\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det(A) = 1$. *Ce sont les*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Déterminons toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *qui appartiennent à* $\mathfrak{su}(2)$, *c'est à dire qui vérifient* $B + {}^t\overline{B} = 0$ *et de trace nulle. Ce sont les*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec α *imaginaire pur. Posons* $a = a_1 + ia_2$ *avec* a_1 *et* a_2 *réels ; on voit que* $tA = ta_1 I_2 + B$ *avec* $\alpha = ita_2$ *et* $\beta = tb$.

Exercice 2. (examen de septembre 2003) Soit (E, h) **un espace hermitien. Désignons par** $\mathrm{Herm}(E)$ **l'espace vectoriel des endomorphismes hermitiens (auto-adjoints) de** E **et par** $\mathrm{Herm}_+(E) \subset \mathrm{Herm}(E)$ **le sous-ensemble des endomorphismes hermitiens à valeurs propres strictement positives.**

1. Démontrer que l'application $\exp : \mathrm{Herm}(E) \to \mathrm{Herm}_+(E)$ **est bijective.**

Indication : utiliser les théorèmes de diagonalisation.

En associant aux endomorphismes hermitiens leurs matrices dans une base orthomormale, la démonstration est semblable à celle de l'exercice 1 (avec des exponentielles réelles au lieu des exponentielles complexes).

Exercice 3. (examen de septembre 2003)

1. Démontrer qu'un endomorphisme f **d'un espace vectoriel de dimension finie** V **sur un corps commutatif** K **est diagonalisable si**

et seulement si son polynôme minimal est scindé sur K et n'a que des racines simples.

La démonstration se trouve dans le cours n° 4.

2. (a) Démontrer que $A \in O(2)$ si et seulement si il existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \textbf{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

C'est l'exercice 3 de la planche 9.

(b) Dans chaque cas, déterminer $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ et préciser si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

La première matrice, non diagonalisable sur $\mathbb{R}$, a un spectre vide dans $\mathbb{R}$ et elle a pour spectre $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$ dans $\mathbb{C}$.
La deuxième matrice, diagonalisable sur $\mathbb{R}$, a pour spectre $\{1, -1\}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

(c) Démontrer que $O(2)$ est un sous-espace compact de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

C'est l'exercice 4 de la planche 9.

(d) Démontrer que $O(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*.$$

L'isomorphisme est défini, sur l'ensemble des premières matrices de la question 2.(a), par $f(A) = e^{i\alpha}$.