

Algèbre et géométrie  
Corrigé de la 2<sup>ème</sup> session

**I Réduction des endomorphismes : vrai ou faux ?**

**1. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , il existe au moins une matrice  $M_n(\mathbb{R})$  n'ayant qu'une seule valeur propre, mais n'étant pas une matrice d'homothétie.** *C'est faux, pour  $n = 1$  toutes les matrices sont des matrices d'homothéties.*

**2. Il existe une matrice  $2 \times 2$  à coefficients complexes non diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .** *Oui, c'est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qui n'est pas diagonalisable parce que son seul vecteur propre est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .*

**3. Il existe une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels non trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .** *Oui, penser aux matrices de rotations d'angle  $\neq k\pi$  et par exemple à  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  : elle n'est pas trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  parce que si elle était semblable à une matrice triangulaire  $T$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , ses valeurs propres apparaîtraient sur la diagonale de  $T$ , or ces valeurs propres sont  $i, -i \notin \mathbb{R}$ .*

**4. Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  ; il existe une matrice  $n \times n$  à coefficients réels diagonalisable et admettant une puissance non diagonalisable.** *Non, si  $A$  est diagonalisable alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale et donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}APP^{-1}AP$$

*est un produit de matrices diagonales, ce qui fait qu'elle est elle-même diagonale.*

**5. Il existe une matrice à coefficients réels non trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ , mais diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .** *Oui, celle de la question 3 : elle est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  parce c'est une matrice  $2 \times 2$  qui a deux valeurs propres distinctes  $i$  et  $-i$ .*

**6. Il existe une matrice à coefficients réels trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ , non diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , et non diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .** *Oui, celle de la question 2.*

**7. Il existe une matrice à coefficients réels trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ , non diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , mais diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .** *Non : si une matrice  $A$  est semblable à une matrice triangulaire à coefficients réels  $T$ , ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont réelles puisque sont sur la diagonale de  $T$ . Comme  $A$*

est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  on a  $\prod_{i=1}^r (A - \lambda_i I_n) = 0$  (voir la fin du cours 4) ; mais les coefficients de cette matrice sont réels, donc  $A$  est aussi diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**8. Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  est pour une valeur de  $n$  au moins polynôme caractéristique d'une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ . C'est faux si le coefficient de son terme de plus haut degré est différent de 1 et de  $-1$ , mais c'est quand même vrai (à une constante multiplicative près) d'après le début du cours 5.**

**9. Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , unitaire de degré  $\geq 1$  et scindé, est pour une valeur de  $n$  au moins polynôme minimal d'une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ . Oui : soit  $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$  ce polynôme, il est polynôme minimal de la matrice de Jordan dont les éléments diagonaux sont successivement  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  et telle que le sous-bloc relatif à chaque  $\lambda_i$  est une matrice  $\beta_i \times \beta_i$  sans coefficient 0 à la droite des termes diagonaux.**

**10. Il existe un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  et des matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $M_2(\mathbb{R})$ ,  $M_3(\mathbb{R})$  et  $M_4(\mathbb{R})$  respectivement tels que  $P$  est le polynôme minimal de  $A$ , de  $B$  et de  $C$ . Oui, par exemple  $X - 1$  est le polynôme minimal de  $I_2$ , de  $I_3$  et de  $I_4$ .**

**II On désigne par  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .**

**1. Montrer que le groupe linéaire  $GL(E)$  des endomorphismes inversibles de  $E$  est un ouvert dense de l'espace  $L(E)$  des endomorphismes de  $E$ .**

*Il est ouvert parce que c'est l'image réciproque par l'application  $u \mapsto \det(u)$  de l'ouvert  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pour démontrer qu'il est dense, il suffit de vérifier que si  $u \notin GL(E)$ , alors  $u + \varepsilon Id_E \in GL(E)$  pour  $\varepsilon$  assez petit. En effet le polynôme caractéristique  $P_u(X) = \det(u - X Id_E)$  admet  $X = 0$  comme racine, donc celui de  $u + \varepsilon Id_E$  c'est à dire  $P_{u+\varepsilon Id_E}(X) = \det(u + \varepsilon Id_E - X Id_E) = P_u(X - \varepsilon)$  n'admet pas  $X = 0$  comme racine (si  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $X = -\varepsilon$  ne soit pas une autre racine de  $P_u$ ), et donc  $\det(u + \varepsilon Id_E) \neq 0$ .*

**2. Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $L(E)$ , tels que  $u$  est nilpotent (on rappellera ce que cela signifie),  $v$  est inversible et  $u \circ v = v \circ u$ .**

**i) Montrer que  $v^{-1} \circ u$  est nilpotent.**

*Il faut d'abord démontrer par récurrence que  $(v^{-1})^k \circ u = u \circ (v^{-1})^k$ . C'est vrai pour  $k = 0$  puisque  $(v^{-1})^0 = Id_E$ . Aussi pour  $k = 1$  :  $u \circ v = v \circ u \Rightarrow v^{-1} \circ (u \circ v) \circ v^{-1} = v^{-1} \circ (v \circ u) \circ v^{-1}$  c'est à dire  $v^{-1} \circ u = u \circ v^{-1}$ . Soit  $k$  tel que  $(v^{-1})^k \circ u = u \circ (v^{-1})^k$ , alors*

$$(v^{-1})^{k+1} \circ u = v^{-1} \circ (v^{-1})^k \circ u = v^{-1} \circ u \circ (v^{-1})^k = u \circ v^{-1} \circ (v^{-1})^k = u \circ (v^{-1})^{k+1}.$$

*Démontrons maintenant par récurrence que  $(v^{-1} \circ u)^k = (v^{-1})^k \circ u^k$ . C'est*

vrai pour  $k = 0$  puisque  $w^0 = Id_E$  pour tout endomorphisme  $w$ . Soit  $k$  tel que  $(v^{-1} \circ u)^k = (v^{-1})^k \circ u^k$ , on a

$$(v^{-1} \circ u)^{k+1} = v^{-1} \circ u \circ (v^{-1} \circ u)^k = v^{-1} \circ u \circ (v^{-1})^k \circ u^k = v^{-1} \circ (v^{-1})^k \circ u \circ u^k = (v^{-1})^{k+1} \circ u^{k+1}.$$

On a donc bien  $(v^{-1} \circ u)^k = (v^{-1})^k \circ u^k$  pour tout  $k$  et, si  $u^p$  est nul,  $(v^{-1} \circ u)^p$  aussi est nul.

**ii) Montrer que  $\det(u + v) = \det(v)$  (on mettra  $v$  en facteur dans  $u + v$ ).**

$\det(u+v) = \det(v(v^{-1} \circ u + Id_E)) = \det(v) \det(v^{-1} \circ u + Id_E)$ . Or  $\det(v^{-1} \circ u + Id_E)$  est égal à 1 puisque c'est la valeur en  $X = -1$  du polynôme caractéristique de  $v^{-1} \circ u$ , c'est à dire  $\det(v^{-1} \circ u - X Id_E)$ , et parce que ce polynôme caractéristique d'endomorphisme nilpotent est  $(-1)^n X^n$ .

**iii) Montrer que cette égalité reste vraie si on ne suppose plus que  $v$  est inversible.**

$\{v \in L(E) / \det(u + v) = \det(v)\}$  est un fermé qui contient  $GL(E)$ . Comme on a vu à la question 1 que  $GL(E)$  est dense dans  $L(E)$ , ce fermé est égal à  $L(E)$ .

**III On désigne par  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  (on rappellera ce que cela signifie).**

**1. i) Que peut-on dire des valeurs propres de  $u$  ?**

L'endomorphisme  $u$  vérifie  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$  pour tout  $x, y \in E$ . On sait d'après le cours que ses valeurs propres sont réelles.

**ii) Si un endomorphisme de  $E$  est symétrique à valeurs propres positives, nous dirons qu'il est symétrique positif.**

**Soit donc  $u$  un endomorphisme symétrique positif de  $E$ . Construire un endomorphisme symétrique positif  $v$  tel que  $u = v^2$ .**

D'après le cours il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale ; cette matrice est donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ où les } \lambda_k \text{ non nécessairement}$$

distincts sont les valeurs propres positives de  $u$ . L'endomorphisme  $v$  dont la

$$\text{matrice dans cette base est } \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ a évidemment pour carré } u,$$

et il est symétrique positif.

**iii) Soit  $w$  un endomorphisme symétrique positif tel que  $u = w^2$ . Montrer que  $w$  commute avec  $u$  et laisse stable les sous-espaces propres de  $u$ . En déduire que  $w = v$ .**

$wu = ww^2 = w^3 = w^2w = uv$ . Soit  $E_{\lambda_k}$  le sous-espace propre relatif à la valeur propre  $\lambda_k$  : on a  $u(V) = \lambda_k V$  pour tout  $V \in E_{\lambda_k}$ . On a aussi  $u(w(V)) = w(u(V)) = w(\lambda_k V) = \lambda_k w(V)$  et par conséquent  $w(V)$  est vecteur propre de  $u$  et  $w(V) \in E_{\lambda_k}$ . Soit  $w_k$  la restriction de  $w$  à  $E_{\lambda_k}$ . C'est un endomorphisme de  $E_{\lambda_k}$  et sa matrice  $M_k$  (dans la base où la matrice de la restriction  $u_k$  de  $u$  est diagonale) vérifie  $(M_k)^2 =$  matrice

$$\text{de } u_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}. \text{ Donc } M_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_k} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix}, \text{ pour tout } k$$

et par conséquent  $w = v$ .

**2. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $u^* \circ u$  est symétrique positif.**

Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée, alors celle de  $u^* \circ u$  est  ${}^tAA$ . Elle est symétrique parce que la transposée d'un produit  $BC$  est  ${}^tC{}^tB$  et (en remplaçant  $B$  par  ${}^tAA$  et  $C$  par  $A$ ) celle de  ${}^tAA$  est  ${}^tAA$ . Donc l'endomorphisme  $u^* \circ u$  est symétrique. Soit  $V \neq 0$  un de ses vecteurs propres, et  $\lambda$  tel que  $u(V) = \lambda V$ . On a  $\langle V, u^* \circ u(V) \rangle = \langle V, \lambda V \rangle = \lambda \langle V, V \rangle$  et d'autre part  $\langle V, u^* \circ u(V) \rangle = \langle u(V), u(V) \rangle$  (parce que  $\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$  pour tout  $x$  et  $y$ ). On en déduit que  $\lambda = \frac{\langle u(V), u(V) \rangle}{\langle V, V \rangle}$  est positif (le produit scalaire de tout vecteur par lui-même étant positif).

**ii) On suppose qu'il existe deux endomorphismes  $v$  et  $q$  de  $E$ ,  $v$  orthogonal (on rappellera ce que cela signifie), et  $q$  symétrique positif, tels que  $u = v \circ q$ . Soit  $w$  l'endomorphisme symétrique positif tel que  $u^* \circ u = w^2$ . Montrer que  $w = q$ .**

Comme l'endomorphisme orthogonal  $v$  vérifie  $v^* = v^{-1}$  on a  $u^* \circ u = q^* \circ v^* \circ v \circ q = q \circ v^{-1} \circ v \circ q = q^2$  qui doit être égal à  $w^2$  et, d'après l'unicité,  $q = w$ .