Licence de Mathématiques-L3	Année 2007-2008

Algèbre et géométrie
Problème 1

A rendre après les vacances en TD

Dans tout ce qui suit, E désigne un K-espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K, et u un endomorphisme de E .

Soient P et Q deux éléments de K[X] premiers entre eux ; on suppose que PQ (u) = 0.

1) i) Quelle égalité donne le théorème de décomposition des noyaux appliqué à P, Q et u ?
ii) Montrer que Im P(u) = ker Q(u) et Im Q(u) = ker P(u) .

2) On suppose que u est diagonalisable et que le polynôme caractéristique de u est de la forme :
$P_u(X) = (X-\lambda)^\alpha (X-\mu)^\beta$, où λ et μ sont les valeurs propres distinctes de u.
i) Exprimer le polynôme minimal de u.
ii) A la décomposition $E = E_\lambda \oplus E_\mu$ sont associées deux projections vectorielles π_λ et π_μ .
Montrer que π_λ est un polynôme de l'endomorphisme u, plus précisément un multiple de $(u- \lambda Id_E)$ (appliquer la question 1 au polynôme minimal de u) ; Idem pour π_μ .

3) i) Déduire de la question 2 une méthode pratique de détermination des vecteurs propres de u utilisant les projections π_λ et π_μ .

ii) Appliquer les résultats précédents à la matrice à coefficients réels $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.