Algèbre et géométrie

Problème d'entraînement

Vous trouverez ci-dessous trois exercices provenant de sujets donnés les années précédentes (corrigés distribués en TD) :

Exercice 1

Soit

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}, \quad \mathfrak{su}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A + {}^t\bar{A} = 0, \operatorname{Tr}(A) = 0\},$$

où $U(n)$ désigne le groupe des matrices unitaires d'ordre n . Montrer que

1. $SU(n) = \{\exp(A) \mid A \in \mathfrak{su}(n)\}$.
2. $\{tA \mid t \in \mathbb{R}, A \in SU(2)\} = \{\mathbb{R}I_2 + \mathfrak{su}(2)\}$.

Indication : Utiliser les théorèmes de diagonalisation.

Exercice 2

Soit (E, h) un espace hermitien. Désignons par $\operatorname{Herm}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes hermitiens (auto-adjoints) de E et par $\operatorname{Herm}_+(E) \subset \operatorname{Herm}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes hermitiens à valeurs propres strictement positives.

1. Démontrer que l'application $\exp : \operatorname{Herm}(E) \rightarrow \operatorname{Herm}_+(E)$ est bijective.
2. Démontrer que $\exp(i\operatorname{Herm}(E)) \subset U(E)$, où $U(E)$ désigne le groupe des automorphismes unitaires de l'espace hermitien E .
3. Est-ce que l'application $\exp : i\operatorname{Herm}(E) \rightarrow U(E)$ est surjective ?
4. Est-ce que l'application $\exp : i\operatorname{Herm}(E) \rightarrow U(E)$ est injective ?

Indication : Utiliser les théorèmes de diagonalisation.

Exercice 3

1. Démontrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie V sur un corps commutatif K est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur K et n'a que des racines simples.
2. (a) Démontrer que $A \in O(2)$ si et seulement si il existe $\alpha \in [0, 2\pi)$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

- (b) Dans chaque cas, déterminer $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ et préciser si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- (c) Démontrer que $O(2)$ est un sous-espace compact de $M_2(\mathbb{R})$.
- (d) Démontrer que $SO(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$$