Licence de mathématiques-L3	Année 2007-2008

Algèbre et géométrie

Corrigé du sujet

1.1 "A et B sont semblables" signifie

qu'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Ces deux matrices ont alors même déterminant

parce que $\det B = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$.

Elles ont aussi même trace

parce que la trace est le 2$^{\text{ème}}$ *terme du polynôme caractéristique (en partant du plus haut degré), et qu'elles ont même polynôme caractéristique (ce qui se démontre de la même façon que l'égalité* $\det B = \det A$ *de la question précédente).*

1.2 Soit T triangulaire supérieure ; $\exp(T)$ est (par définition)

la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$.

Elle est triangulaire supérieure parce que

on sait que les T^k le sont.

Ses éléments diagonaux sont

les $\exp(t_{ii})$ *parce que, les éléments diagonaux de* T^k *étant* $(t_{ii})^k$, *ceux de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ *sont* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_{ii})^k}{k!} = \exp(t_{ii})$.

1.3 $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

parce que $\det(\exp(A)) = \exp(t_{11}) \dots \exp(t_{nn}) = \exp(t_{11} + \cdots + t_{nn}) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

1.4 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^2 & 3e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$ *donc* $\det(\exp(A)) = e^2 e^2 = e^{2+2}$ *est égal à* $\exp(\mathrm{tr}(A)) = e^4$.

2.1 On appelle "bloc de Jordan à k lignes et k colonnes, et de valeur propre α" :

$$la\ matrice\ B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2.2 L'endomorphisme u de matrice B dans la base canonique $\{e_1, \dots, e_k\}$ a pour matrice B^t dans la base :

$\{e_k, \dots, e_1\}$, puisque $u(e_k) = \alpha e_k + e_{k-1}$, $u(e_{k-1}) = \alpha e_{k-1} + e_{k-2}$, $\dots$, $u(e_2) = \alpha e_2 + e_1$, $u(e_1) = \alpha e_1$.

2.3 Toute matrice à n lignes et n colonnes est semblable à sa transposée :

on sait qu'elle est semblable à une matrice de Jordan J ; et (par transposition) sa transposée est semblable à la transposée de J ; or J et sa transposée sont semblables, par une méthode analogue à celle de la question précédente : l'endomorphisme qui a pour matrice J dans une base $\{e_1, \dots, e_n\}$, a pour matrice la transposée de J dans la base :

$$\{e_{i_1}, e_{i_1-1}, \dots, e_1, e_{i_1+i_2}, e_{i_1+i_2-1}, \dots, e_{i_1+1}, \dots, \dots, e_{i_1+\dots+i_m}, e_{i_1+\dots+i_m-1}, \dots, e_{i_1+\dots+i_{m-1}+1}\},$$

où $i_1, \dots, i_m$ sont les longueurs des blocs de Jordan de J.

3.1 i) Si l'endomorphisme u est antisymétrique (c'est à dire si $< u(x), y >= - < x, u(y) >$) alors u^2 est symétrique

parce qu'en utilisant deux fois l'antisymétrie de u on obtient

$$< u^2(x), y >= - < u(x), u(y) >=< x, u^2(y) > . \qquad (1)$$

On a aussi $< u^2(x), x >\leq 0$

parce qu'en faisant $x = y$ dans la relation (1) on obtient $- < u(x), u(x) >$ qui, d'après la définition des produits scalaires, est négatif.

On a $< u(x), x >= 0$:

en faisant $x = y$ dans la relation $< u(x), y >= - < x, u(y) >$ on en déduit que $2 < u(x), x >= 0$ et par conséquent $< u(x), x >= 0$.

ii) La matrice de u dans une base orthonormée

est antisymétrique : dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on peut calculer facilement les coordonnées des vecteurs et les matrices des endomorphismes. En effet la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de u contient les coordonnées de $u(e_j)$, lesquelles sont les $< e_i, u(e_j) >$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne $j^{\text{ème}}$ colonne est donc $< e_i, u(e_j) >$ et celui de la $j^{\text{ème}}$ ligne $i^{\text{ème}}$ colonne est $< e_j, u(e_i) >$. Mais par l'antisymétrie de u, ce dernier est égal à $- < u(e_j), e_i >$ c'est à dire l'opposé du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne $j^{\text{ème}}$ colonne, ce qui prouve que la matrice est antisymétrique.

iii) Si u est un automorphisme antisymétrique, alors la dimension de E est paire :

la matrice (antisymétrique) de u vérifie $A^t = -A$ donc $\det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A$, ce qui fait $\det A = (-1)^n \det A$ et, en divisant par $\det A \neq 0$, $1 = (-1)^n$ c'est à dire n pair.

3.2 i) Si u est un endomorphisme antisymétrique alors les valeurs propres de u^2 sont réelles négatives :

on sait déjà d'après le cours que les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles. En faisant $u^2(x) = \lambda x$ dans l'inégalité $< u^2(x), x > \leq 0$ on obtient $< \lambda x, x > \leq 0$ c'est à dire $\lambda < x, x > \leq 0$ et, compte tenu que $< x, x >$ est strictement positif (les vecteurs propres x étant non nuls), on en déduit $\lambda \leq 0$.

ii) Les polynômes caractéristiques P de u et Q de u^2 vérifient la relation $Q(X^2) = (-1)^n (P(X))^2$

parce qu'en appelant A la matrice de u dans une base orthonormée on a

$$\begin{aligned}
Q(X^2) &= \det(A^2 - X^2 I_n) \\
&= \det\big((A + XI_n)(A - XI_n)\big) \\
&= \det(A + XI_n)\det(A - XI_n) \\
&= \det\big((A + XI_n)^t\big)\det(A - XI_n) \\
&= \det(A^t + XI_n)\det(A - XI_n) \\
&= \det(-A + XI_n)\det(A - XI_n) \\
&= (-1)^n \det(A - XI_n)\det(A - XI_n) \\
&= (-1)^n (P(X))^2.
\end{aligned}$$

iii) Les racines de P sont nulles ou imaginaires pures

parce que si $P(\lambda) = 0$, on a $Q(\lambda^2) = 0$, donc λ^2 est valeur propre de u^2 ; or on sait que les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles ; or si $\lambda^2 = r$ réel, c'est que $\lambda = \pm\sqrt{r}$ (dans le cas $r \geq 0$) ou $\lambda = \pm i\sqrt{-r}$ (dans le cas $r < 0$). Dans ce dernier cas λ est imaginaire pur. Dans le premier cas

λ est nul : on le voit en appliquant la relation $< u(x), y >= - < x, u(y) >$ à $x = y =$ vecteur propre de u pour la valeur propre λ.

3.3 i) Le sous-espace propre E_λ de u^2 associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ est stable par u :

pour $x \in E_\lambda$ on a $u^2(x) = \lambda x$ donc $u^3(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$, ce qui fait que $u(x)$ est vecteur propre de u^2, c'est à dire $u(x) \in E_\lambda$.

Il est de dimension paire :

la restriction de u à E_λ étant un automorphisme de E_λ (sauf dans le cas $\lambda = 0$, où cette restriction est nulle), ce sous-espace est de dimension paire d'après 3.1 iii).

ii) Il existe une base orthogonale de E_λ, de la forme $\{e_1, \ldots, e_p, u(e_1), \ldots, u(e_p)\}$:

on prend un vecteur e_1 non nul dans E_λ. D'après la question 3.1 i) il est orthogonal à $u(e_1)$, donc $\{e_1, u(e_1)\}$ est libre. $\mathrm{Vect}\big(\{e_1, u(e_1)\}\big)$ *est stable par u puisque $u\big(\alpha e_1 + \beta u(e_1)\big) = \alpha u(e_1) + \beta u^2(e_1) = \alpha u(e_1) + \beta\lambda e_1$. On déduit de la relation d'antisymétrie de u que l'orthogonal de* $\mathrm{Vect}\big(\{e_1, u(e_1)\}\big)$ *(dans E_λ) est aussi stable par u. On peut donc recommencer : en prenant un vecteur e_2 non nul dans* $\mathrm{Vect}\big(\{e_1, u(e_1)\}\big)^\perp$*, on obtient un système $\{e_2, u(e_2)\}$ libre et orthogonal de* $\mathrm{Vect}\big(\{e_1, u(e_1)\}\big)^\perp$*. En itérant $\dfrac{\dim E_\lambda}{2}$ fois cette méthode on obtient une base orthogonale $\{e_1, \ldots, e_p, u(e_1), \ldots, u(e_p)\}$ de E_λ.*

iii) On obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1×1 ou 2×2 :

il suffit d'appliquer la méthode précédente à chaque E_λ. En effet pour chacun des e_i qu'on a choisi, les images par u de e_i et de $u(e_i)$ sont respectivement $u(e_i)$ et λe_i, d'où le bloc $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la matrice de u. Les blocs correspondant à la valeur propre 0 sont bien sûr de taille 1×1, et n'ont qu'un seul terme qui est 0.

Cependant la base de E qu'on a ainsi obtenue est orthogonale mais pas forcément orthonormée. On obtient une base orthonormée en remplaçant chaque vecteur e_i par $\dfrac{e_i}{||e_i||}$ (où $||e_i|| = \sqrt{< e_i, e_i >}$), et de même pour les $u(e_i)$. Les blocs de taille 2×2 seront alors de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ car la matrice de u dans une base orthonormée est antisymétrique d'après la question 3.1 ii). Le carré de ce bloc étant $\begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, on en déduit $-\alpha^2 = \lambda$ c'est à dire $\alpha = \pm i\sqrt{-\lambda}$.