

Révisé du 16 novembre 2007 - corrigé -

- 1.1 ii) On a $P_A(x) = P_B(x) = (1-x)^4$, et $P_C(x) = (1-x)^3(5-x)$, d'où $S_p(A) = S_p(B) = \{1\}$ et $S_p(C) = \{1, 5\}$.
 ii) Le polynôme minimal de A , comme celui de B , est un diviseur de $d^0 \geq 1$ de $(1-x)^4$; il peut donc valoir $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ ou $(x-1)^4$; on vérifie par le calcul que $(A-1)^3 \neq 0$ et $(A-1)^4 = 0$, d'où l'existence de $\mu_A(x) = \mu_B(x) = (x-1)^4$. Le polynôme minimal de C est un diviseur de $P_C(x)$ admettant 1 et 5 comme racines; il peut valoir $(x-5)(x-1)$ ou $(x-5)(x-1)^2$ ou $(x-5)(x-1)^3$; comme on vérifie que $(C-5)(C-1)^2 \neq 0$, on a $\mu_C(x) = (x-5)(x-1)^3$.
 iii) Les polynômes minimaux de A , B et C sont scindés sur $\mathbb{R}$, mais aucun d'entre eux n'est à racines simples. Ainsi aucune des 3 matrices carrées n'est diagonalisable.

- 1.2 i) Comme $A \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $f_4 = (0, 0, 0, 1)$, $g_3 = (4, 3, 2, 0)$, $g_2 = (12, 4, 0, 0)$ et $g_1 = (0, 0, 0, 0)$.
 L'ensemble $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ est libre, donc constitue une base de $\mathbb{R}^4$.
 Comme $v(g_1) = v^4(e_4) = 0$, $v(g_2) = g_1$, $v(g_3) = g_2$ et $v(g_4) = g_3$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 Donc, puisque $u = v + \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

- ii) La matrice C n'est semblable ni à A , ni à B , car n'a pas le même polynôme caractéristique que A et B . Les matrices A et B représentent toutes deux l'endomorphisme u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$: elles sont donc semblables.

- 2.1 i) On a $P_B(x) = (1-x)^2 - 4 = (x-3)(x+1)$, et B_0 , qui admet deux v.p. distinctes, est diagonalisable.
 On obtient $E_1 = \text{Vect}((2, -1))$ et $E_2 = \text{Vect}((2, 1))$, d'où $B_0 = Q_0 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q_0^{-1}$, avec

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q_0^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- ii) Posons $Q = \begin{pmatrix} 2I_m & 2I_m \\ I_m & -I_m \end{pmatrix}$, qui appartient à $GL_{2m}(\mathbb{C})$, avec $Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_m & 2I_m \\ I_m & -2I_m \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}.$$

- iii) On en déduit que $P_B(x) = P_{Q^{-1} B Q}(x) = P_{3A}(x) \times P_{-A}(x) = \det(3A - xI_m) \det(-A - xI_m)$
 $= \det[3I_m (A - \frac{x}{3} I_m)] \det[-I_m (A - (-x) I_m)] = (-3)^m P_A(\frac{x}{3}) P_A(-x)$.

- 2.2 i) Les matrices B et $Q^{-1} B Q$ représentent dans deux bases différentes le même endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$; elles ont donc même polynôme minimal.

- ii) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Dans l'anneau A si et seulement si P est un multiple de $\pi_A(\frac{x}{3})$, $\pi_B(x)$. Donc P annule A si et seulement si P est un multiple de $3^m \pi_A(\frac{x}{3})$ (qui est unitaire).
 ou encore si et seulement si P est un multiple de $3^m \pi_A(\frac{x}{3})$ (qui est unitaire).
 Ainsi, $\pi_{3A}(x) = 3^m \pi_A(\frac{x}{3})$.

- iii) On en déduit que $\pi_B(x)$ vaut $\text{ppcm} (3^m \pi_A(\frac{x}{3}), (-1)^m \pi_A(-x))$.

$$\text{Plus précisément, si } \pi_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - d_i)^{\beta_i}, \text{ on a } \pi_B(x) = \text{ppcm} \left(\prod_{i=1}^r (x - 3d_i)^{\beta_i}, \prod_{i=1}^r (x + d_i)^{\beta_i} \right).$$

$$\text{Ainsi: si } A \text{ est diagonale avec } S_p(A) = \{1, 3\}, \text{ on a } \pi_A(x) = (x-1)(x+3)$$

$$\text{et } \pi_B(x) = \text{ppcm}((x-3)(x+3), (x+1)(x-3)) = (x+1)(x-3)(x+3),$$

$$\text{qui est de degré 3, alors que } 2 \deg \pi_A(x) = 4.$$