SPC 02 : Géométrie & Algèbre Linéaire
Cours

Jean FONTAINE

December 23, 2012

Chapter 1 Systèmes linéaires I

Chapter 2 Calcul vectoriel

Chapter 3 Matrices

Chapter 4 Base

On est dans $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 2, 3$), de base canonique $\mathcal{B}$.

Abréviations BON: base orthonormale; BOND: base orthonormale directe.

4.1 Famille libre, famille génératrice

Famille libre et Famille liée

Def. La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est dite *liée* si, au choix:

(i) il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k a_k = 0$.

(ii) l'un au moins des vecteurs est CL des autres.

On dit encore que les vecteurs $a_1, \dots, a_p$ sont *dépendants*.

Une *sur-famille* de famille liée est encore liée. Une famille qui comporte plus de n vecteurs est forcément liée.

Def. La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est dite *libre* si elle est non liée, autrement dit au choix:

(i) l'équation $\sum_{k=1}^p \lambda_k a_k = 0$ admet comme seule solution $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

(ii) aucun vecteur n'est CL des autres.

On dit encore que les vecteurs $a_1, \dots, a_p$ sont *indépendants*.

Une *sous-famille* de famille libre est encore libre. Une famille libre doit comporter au plus n vecteurs et une famille libre de n vecteurs est dite *maximale*.

Famille génératrice

Def. La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est dite *génératrice* de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur x est CL de $a_1, \dots, a_p$, autrement dit si l'équation $\sum_{k=1}^p \lambda_k a_k = x$ admet toujours au moins une solution.

Une *sur-famille* de famille génératrice est encore génératrice. Une famille génératrice doit comporter au moins n vecteurs et une famille génératrice de n vecteurs est dite *minimale*.

Vrac

- Deux vecteurs forment une famille liée ssi ils sont colinéaires.

Trois vecteurs forment une famille liée ssi ils sont coplanaires.

- Dans $\mathbb{R}^n$.

Si une famille comporte $p > n$ vecteurs elle n'est pas libre, si elle comporte $p < n$ vecteurs elle n'est pas génératrice.

Si une famille comporte n vecteurs alors libre $\Leftrightarrow$ génératrice $\Leftrightarrow$ base.

4.2 Base

Def. La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est une *base* de $\mathbb{R}^n$ si elle est libre et génératrice.

Toutes les bases ont le même nombre n de vecteurs, appelé *dimension* de $\mathbb{R}^n$.

Res.

1. Une base est à la fois une *famille libre maximale* (donc de n vecteurs) et une *famille génératrice minimale* (donc de n vecteurs): de plus l'une des deux propriétés suffit pour que ce soit une base.
2. La famille $(a_1, \dots, a_n)$ est une base ssi tout vecteur x est CL de $a_1, \dots, a_n$ de manière unique: si $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les *coordonnées* de x dans la base $(a_1, \dots, a_n)$.

Res.

1. De toute famille génératrice on peut extraire une sous-famille génératrice de n vecteurs, donc une base.
2. Toute famille libre peut être complétée en sur-famille libre de n vecteurs, donc en base.

Res. La famille $(a_1, \dots, a_n)$ est une base ssi, au choix:

- (i) $(a_1, \dots, a_n)$ est libre
- (ii) $\det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.
- (iii) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)$ est inversible

Base orthonormale

Def. La base $(a_1, \dots, a_n)$ est dite *directe* si $\det(a_1, \dots, a_n) > 0$.

Def. Une base *orthogonale* est une base dont les vecteurs sont orthogonaux, et une base *orthonormale* est une base *orthogonale* dont les vecteurs sont *unitaires*.

Vrac

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires dans $\mathbb{R}^3$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.
- Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une BOND de $\mathbb{R}^3$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$, $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

4.3 Matrice de passage

Def. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice *inversible* $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de la famille $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est la base canonique et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ alors les vecteurs colonnes de P donnent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Res. On a

$$(x)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times (x)_{\mathcal{B}'}$$

Noter que $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1}$.

Chapter 5 Droites et Plans

Abréviations VD: vecteur directeur; VN: vecteur normal, CD: coefficient directeur.

RP: représentation paramétrique; EC: équation cartésienne; SEC: système d'équations cartésiennes.

5.1 Droites de $\mathbb{R}^2$

Droite définie par un point et un vecteur directeur

Def. On donne un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul.

1. La droite (affine) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble $D = (A, \vec{u})$ des points M vérifiant:

$$M \in D \text{ ssi } \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u}.$$

2. La direction de D est l'ensemble $\vec{D}$ des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$: elle est appelée droite vectorielle et est notée $D = \mathbb{R}\vec{u}$ ou $D = \text{vect}(\vec{u})$.

Si on connaît deux points distincts A et B de D alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est VD de D .

On peut traduire la définition de deux manières:

Def/Res. $M \in D$ ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ou encore

$$M = A + t\vec{u}.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient une représentation paramétrique de la forme

$$x = x_A + t\alpha, \quad y = y_A + t\beta.$$

Def/Res. $M \in D$ ssi

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + c = 0.$$

Il y a encore la possibilité de définir D par son équation réduite : elle est de la forme

$$y = mx + p,$$

ou $x = x_0$ si elle est parallèle à l'axe des ordonnées. Le réel m est le coefficient directeur (ou pente) de la droite .

Droite définie par un point et un vecteur normal

Def. Un vecteur normal de $D = (A, \vec{u})$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

On peut caractériser une droite par un point et un vecteur normal:

Def/Res. On donne un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul. L'ensemble D des points M vérifiant

$$M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

est une droite, appelée droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Droites parallèles, droites perpendiculaires

Deux droites sont dites *parallèles* si leurs VD sont colinéaires.

Deux droites sont dites *perpendiculaires* si leurs VD sont orthogonaux.

Vrac

- *Médiane, hauteur, médiatrice.*
- *Il faut connaître tous les liens entre les différentes caractérisations d'une droite: (PT,VD), (PT1,PT2), (PT,CD), RP, EC, ER. Quelques résultats utiles:*
 - si $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ est VD de D et $\alpha \neq 0$ alors $m = \frac{\beta}{\alpha}$.
 - si D passe par A, B distincts alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
 - si $D : ax + by + c = 0$ alors tout vecteur satisfaisant $ax + by = 0$ est un VD de D , en particulier $\vec{u} = (-b, a)$.
 - si $D : ax + by + c = 0$ alors $\vec{n} = (a, b)$ est un VN de D .
 - si m est le CD de D alors $\vec{u} = (1, m)$ est un VD de D .

5.2 Plans de $\mathbb{R}^3$

Plan défini par un point et une base

Def. On donne un point A et deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires.

1. Le plan (affine) passant par A et de base $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$ des points M vérifiant

$$M \in P \text{ ssi } \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$

2. La direction de P est l'ensemble $\overrightarrow{P}$ des vecteurs coplanaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il est appelé *plan vectoriel* et est notée $P = \mathbb{R}\vec{u} \oplus \mathbb{R}\vec{v}$ ou $P = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Si on connaît trois points non alignés A, B et C de P alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ forment une base de P .

On peut traduire la définition de deux manières:

Def/Res. $M \in P$ ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$, ou encore

$$M = A + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient une *représentation paramétrique* de la forme

$$x = x_A + s\alpha + t\alpha', \quad y = y_A + s\beta + t\beta', \quad z = z_A + s\gamma + t\gamma'.$$

Def/Res. $M \in P$ ssi

$$\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \right] = 0.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient une *équation cartésienne* de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Plan défini par un point et un vecteur normal

Def. Un vecteur *normal* de $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On peut caractériser un plan P par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$:

Def/Res. On donne un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul. L'ensemble P des points M vérifiant

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

est un plan, appelé *plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$* .

Plans parallèles, plans perpendiculaires

Deux plans $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P' = (A', \vec{u}', \vec{v}')$ sont dits *parallèles* si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Deux plans sont dits *perpendiculaires* si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre: par exemple si $\vec{a} \wedge \vec{b} \in P'$.

5.3 Droites de $\mathbb{R}^3$

Droite définie par un point et un vecteur directeur La définition est analogue au cas de $\mathbb{R}^2$. On peut la traduire de deux manières:

Def/Res. $M \in D$ ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ou encore

$$M = A + t\vec{u}.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient une *représentation paramétrique* de la forme

$$x = x_A + t\alpha, \quad y = y_A + t\beta, \quad z = z_A + t\gamma.$$

Def/Res. $M \in D$ ssi

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = 0.$$

En explicitant la relation en base canonique on obtient un système d'*équations cartésiennes*: il y en a trois mais deux suffisent.

Droite définie comme intersection de deux plans

Res. L'intersection de deux plans distincts est une droite. Réciproquement, toute droite peut être obtenue comme intersection de deux plans.

Les EC des deux plans définissent la droite intersection par un *système d'équations cartésiennes*.

Droite parallèle ou perpendiculaire à un plan

Une droite $D = (A, \vec{u})$ est dite *parallèle* à un plan $P = (B, \vec{v}, \vec{w})$ si $\vec{u}$ est coplanaire à $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Une droite $D = (A, \vec{u})$ est dite *perpendiculaire* à un plan $P = (B, \vec{v}, \vec{w})$ si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Vrac

- Il faut connaître tous les liens entre les différentes caractérisations d'un plan: $(PT, BASE)$, $(PT1, PT2, PT3)$, RP , EC . Quelques résultats utiles:
 - Si $P : ax + by + cz + d = 0$ alors tout couple de vecteurs non colinéaires satisfaisant $ax + by + cz = 0$ forme une base de P ; en particulier $\vec{u} = (-b, a, 0)$ et $\vec{v} = (-c, 0, a)$ (sauf exception).
 - si $P : ax + by + cz + d = 0$ alors $\vec{n} = (a, b, c)$ est un VN de P .
 - Pour obtenir une EC d'un plan à partir d'une RP on peut éliminer les paramètres dans les relations de la RP .
 - Pour obtenir une RP d'un plan à partir d'un système d' EC on résoud le système: les IA sont les paramètres de la RP .
- Pour déterminer l'intersection de p plans on résoud le système des p EC : on obtient ainsi une RP dont les paramètres sont les IA du système.

Chapter 6 Sous-espace vectoriel

On est dans $\mathbb{R}^n$.

Res. Une partie F de $\mathbb{R}^n$ en est un *sous-espace (vectoriel)* si:

- (i) $0 \in F$
- (ii) $x, y \in F \Rightarrow \lambda x + \mu y \in F$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\{0\}$ et E sont deux sous-espaces *triviaux* de E .

Les notions de famille génératrice, famille libre et liée, base restent valables dans F , mais il faut prendre garde que

$$\dim F \leq \dim E.$$

Par exemple, et si $\dim F = p < n$:

- Le fait de travailler dans F oblige à être précis dans les formulations:
 - une famille libre maximale *de* F sera toujours une famille libre de E , mais non maximale.
 - une famille génératrice *de* F ne sera pas génératrice de E .
- Le fait de travailler dans F apporte des informations:
 - $p + 1$ vecteurs de E ne sont pas forcément liés, mais $p + 1$ vecteurs de F si.
 - une famille libre de p vecteurs de F est une base de F , alors que ce n'est pas le cas dans E .

Sous-espaces orthogonaux

Def. Les sous-espaces F et G sont dites *orthogonaux* si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre: on note $F \perp G$.

En pratique il suffit de vérifier que tout vecteur d'une base de l'un est orthogonal à tout vecteur d'une base de l'autre.

Sous-espace engendré par une famille

Res. Soient p vecteurs $a_1, \dots, a_p$ de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des vecteurs

$$x = \sum_{k=1}^p t_k a_k \quad (t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R})$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, appelé *sous-espace engendré par la famille* $(a_1, \dots, a_p)$: il est noté $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$.

La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est donc *génératrice* de $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$ par définition: si elle est également *libre* alors c'est une *base* de $\text{vect}(a_1, \dots, a_p)$ et on note encore $\text{vect}(a_1, \dots, a_p) = \bigoplus_{k=1}^p \mathbb{R}a_k$.

Rang d'une famille

Def. Le rang r de la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est la dimension du sous-espace vect $(a_1, \dots, a_p)$. Donc:

- (i) r est le nombre *maximum* de vecteurs indépendants parmi $a_1, \dots, a_p$.
- (ii) une sous-famille libre de r vecteurs extraite de $(a_1, \dots, a_p)$ est une base de vect $(a_1, \dots, a_p)$.

Le rang r d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifie $r \leq \min(p, n)$:

Res. Si $r = p$ alors la famille $(a_1, \dots, a_p)$ est libre, si $r = n$ alors elle est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Res. On ne change pas le rang de la famille $(a_1, \dots, a_p)$ en remplaçant l'un des vecteurs a_k par une combinaison linéaire $a_k + \sum_{j < k} \lambda_j a_j$.

Def. Le rang d'une matrice est celui de ses vecteurs colonnes.

On calcule le rang d'une matrice par la *méthode du pivot sur les colonnes*, dont le principe est analogue à celle sur les lignes. D'ailleurs:

Res. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Image, Noyau Soit A une matrice $n \times n$ et $x \rightarrow A.x$ l'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associée.

Def.

1. On appelle *image* de A l'ensemble $\{A.x, x \in E\}$, noté $\text{Im } A$.
2. On appelle *noyau* de A l'ensemble $\{x \in E, A.x = 0\}$, noté $\text{Ker } A$.

Res.

1. $\text{Ker } A$ est un sous-espace de E .
2. $\text{Im } A$ est le sous-espace de F engendré par les vecteurs colonnes de A .
3. On a

$$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = \dim E.$$

En pratique la dimension de $\text{Im } A$ est celle du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de A , donc le rang de A .

Vrac

- Dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces non triviaux sont les droites vectorielles, dans $\mathbb{R}^3$ ce sont les droites et plans vectoriels.
- Si a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ le sous-espace engendré par a est l'ensemble $\text{vect}(a) = \mathbb{R}a$ des vecteurs

$$x = ta \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ce sous-espace est la droite (vectorielle) de vecteur directeur a : on dit encore que (a) est une base de D .

- Si (a, b) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ le sous-espace engendré par a et b est l'ensemble $\text{vect}(a, b) = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ des vecteurs

$$x = sa + tb \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Ce sous-espace est le plan (vectoriel) de base (a, b) .

Chapter 7 Systèmes linéaires II