SPC 02 : Géométrie & Algèbre Linéaire
Exercices

Jean FONTAINE

December 23, 2012

Chapter 1 Systèmes linéaires I

Chapter 2 Calcul vectoriel

Chapter 3 Matrices

Chapter 4 Base

Famille libre, famille génératrice

Exercise 4.0.1 *Familles libres*

On considère les familles ci-dessous:
(i) $E = \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{a}_1 = (1,2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2,5)$, $\overrightarrow{a}_3 = (6,17)$, $\overrightarrow{a}_4 = (-4,1)$
(ii) $E = \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{a}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{a}_2 = (-1,1,2)$, $\overrightarrow{a}_3 = (-2,1,2)$
Déterminer si la famille est libre.

Exercise 4.0.2 *Familles génératrices*

On considère les familles ci-dessous:
(i) $E = \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{a}_1 = (1,2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2,5)$
(ii) $E = \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{a}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{a}_2 = (1,1,0)$, $\overrightarrow{a}_3 = (0,1,1)$, $\overrightarrow{a}_4 = (1,1,1)$
Déterminer si la famille est génératrice de E.

Exercise 4.0.3 *Familles libres et familles génératrices*

1. (i) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ *sont-ils toujours libres? parfois générateurs de* $\mathbb{R}^2$ *?*
(ii) Même question dans $\mathbb{R}^3$.
2. (i) Trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ *sont-ils parfois libres? toujours générateurs de* $\mathbb{R}^2$ *?*
(ii) Même question dans $\mathbb{R}^3$.

Base

Exercise 4.0.4 *Bases*

On considère les familles ci-dessous:
(i) $E = \mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{a}_1 = (-4,6)$, $\overrightarrow{a}_2 = (6,-9)$
(ii) $E = \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{a}_1 = (1,1,1)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0,1,1)$, $\overrightarrow{a}_3 = (0,0,1)$
Déterminer si la famille est une base de E.

Exercise 4.0.5 *Base orthonormale*

Soient $\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. *Vérifier que* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux et unitaires puis compléter* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *en BOND de* $\mathbb{R}^3$.

Matrice de passage

Exercise 4.0.6 *Changement de base 1*

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (1,2)$, $\overrightarrow{b} = (3,-1)$ *de* $\mathbb{R}^2$. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *et déterminer les coordonnées de* $\overrightarrow{u} = (x,y)$ *dans cette base.*

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,1,0)$, $c = (1,0,0)$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et déterminer les coordonnées de* $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ *dans cette base.*

Exercise 4.0.7 *Changement de base 2*

1. On considère une base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et on pose* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. *La famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^2$ *?*

2. On considère une base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et on pose* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. *La famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Chapter 5 Droites et Plans

Droites de $\mathbb{R}^2$

Exercise 5.0.8 *Droites affines*

On considère les droites D suivantes:
(i) D passe par $A=(1,2)$ et admet $\overrightarrow{u}=(-1,3)$ comme VD
(ii) D passe par $A=(1,-1)$ et $B=(2,3)$
(iii) D passe par $A=(0,2)$ et admet $m=-2$ comme CD
(iv) D passe par $A=(-1,1)$ et admet $\overrightarrow{n}=(1,2)$ comme VN
(v) D admet la RP $x=1-2t, y=3+t$
(vi) D admet l'EC $5x-4y=1$
(vii) D admet l'ER $y=3x-2$
Donner à chaque fois deux points de D, un VD, un VN, une RP, une EC, son ER, son CD.

Exercise 5.0.9 Parallélisme, Perpendicularité

1. On considère la droite $D: x+y+1=0$ et le point $A=(-1,-1)$. Déterminer une EC de la droite D' parallèle à D et passant par A, ainsi qu'une EC de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par A.

2. On considère la droite $D: x=3t-4, y=2t+1$ et le point $A=(-1,-1)$. Déterminer une RP de la droite D' parallèle à D et passant par A, ainsi qu'une RP de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par A.

3. On considère la droite $D: y=x+4$ et le point $A=(-1,-1)$. Déterminer l'ER de la droite D' parallèle à D et passant par A, ainsi que l'ER de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par A.

Exercise 5.0.10 Médiane, Hauteur, Médiatrice

On considère les points $A=(1,-1)$, $B=(-2,1)$, $C=(2,3)$.
1. Déterminer une EC de la médiane issue de A du triangle ABC.
2. Déterminer une EC de la hauteur issue de A du triangle ABC.
3. Déterminer une EC de la médiatrice de $[B,C]$.

Plans de $\mathbb{R}^3$

Exercise 5.0.11 *Plans affines*

On considère les plans P suivants:
(i) P passe par $A=(1,2,1)$ et admet $\overrightarrow{u}=(-1,3,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$ comme base
(ii) P passe par $A=(1,-1,2)$, $B=(0,1,1)$ et $C=(2,3,0)$
(iii) P passe par $A=(-1,1,0)$ et admet $\overrightarrow{n}=(1,2,3)$ comme VN
(iv) P admet la RP $x=1+s-2t,\ y=3-s+t,\ z=2s-t$
(v) P admet l'EC $5x-4y+z=1$
Donner à chaque fois trois points de P, une base, un VN, une RP, une EC.

Exercise 5.0.12 Parallélisme, Perpendicularité

1. On considère le plan $P: x+y+z+1=0$ et le point $A=(-1,-1,-1)$. Déterminer une EC du plan P' parallèle à P et passant par A ainsi qu'une RP de la droite D' perpendiculaire à P et passant par A.

2. On considère la droite $D: x=3t-4,\ y=2t+1,\ z=t$ et le point $A=(-1,-1,-1)$. Déterminer une RP de la droite D' parallèle à D et passant par A ainsi qu'une EC du plan P' perpendiculaire à D et passant par A.

Exercise 5.0.13 *BON d'un plan*

Soient $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. *Déterminer une BON du plan passant par* O *et de base* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *et compléter cette base en BOND de* $\mathbb{R}^3$.

Droites de $\mathbb{R}^3$

Exercise 5.0.14 *Droite affine*

Soient A, B *deux points distincts de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Chapter 6 Sous-espace vectoriel

Sous-espace engendré par une famille

Exercise 6.0.15 *Sous-espace engendré par une famille*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ *la famille* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *est libre et la famille* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *est liée. Quelles sont les affirmations justes parmi celles ci-dessous?*

(i) $\overrightarrow{a}$ *est CL de* $\overrightarrow{b}$ *et* $\overrightarrow{c}$ *(ii)* $\overrightarrow{b}$ *est CL de* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{c}$ *(iii)* $\overrightarrow{c}$ *est CL de* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$

2. (i) Dans $\mathbb{R}^3$ *on émet l'hypothèse que la famille* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$ *est génératrice, la famille* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *est liée et la famille* $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ *est libre. Est-ce possible? Si oui extraire une famille libre maximale de* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$.

(ii) Même question dans $\mathbb{R}^2$.

Rang d'une famille

Exercise 6.0.16 *Rang*

On considère les familles ci-dessous:

(i) $E = \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0)\,,\ \overrightarrow{a}_2 = (-1, 1)\,,\ \overrightarrow{a}_3 = (2, -1)$

(ii) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 1)\,,\ \overrightarrow{a}_2 = (-1, 1, 2)\,,\ \overrightarrow{a}_3 = (2, -1, -1)$

(iii) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (0, 1, 1)\,,\ \overrightarrow{a}_2 = (-1, 1, 2)\,,\ \overrightarrow{a}_3 = (2, -1, -1)\,,\ \overrightarrow{a}_4 = (2, 3, 1)$

(iv) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (0, 3, 1)\,,\ \overrightarrow{a}_2 = (4, 1, 1)$

Déterminer leur rang et donner une base du sous-espace qu'elles engendrent.

Image, Noyau

Exercise 6.0.17 *Image, Noyau*

On considère les matrices suivantes:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} A$ *et de* $\operatorname{Im} A$.

Chapter 7 Systèmes linéaires II