LPC 2 : Exercices

Jean FONTAINE

November 6, 2012

Chapter 1 Base

Exercise 1.0.1 ♡♡ *Vecteurs colinéaires de* $\mathbb{R}^2$

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *suivants:*

(i) $\overrightarrow{u} = (1, m)\,, \overrightarrow{v} = (m, 1)$ *(ii)* $\overrightarrow{u} = (m, m^2)\,, \overrightarrow{v} = (m, 1)$

Déterminer les valeurs de m *pour lesquelles* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Exercise 1.0.2 ♡♡ *Vecteurs colinéaires et coplanaires de* $\mathbb{R}^3$

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, m, m)$ *et* $\overrightarrow{v} = (m, 1, 1)$*. Déterminer les valeurs de* m *pour lesquelles* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *suivants:*

(i) $\overrightarrow{a} = (1, 1, 2)\,, \overrightarrow{b} = (1, 2, 1)\,, \overrightarrow{c} = (2, 1, 1)$

(ii) $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)\,, \overrightarrow{b} = (3, 2, 1)\,, \overrightarrow{c} = (5, 0, 5)$

Les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *sont-ils coplanaires ?*

Exercise 1.0.3 ♡♡ *Familles libres*

On considère les familles ci-dessous:

(i) $E = \mathbb{R}^2 : \ \overrightarrow{a}_1 = (1, 2)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (2, 5)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (6, 17)\,, \ \overrightarrow{a}_4 = (-4, 1)$

(ii) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (-1, 1, 2)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (-2, 1, 2)$

(iii) $E = \mathbb{R}^4 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 2, -4, 3)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (2, 5, -3, 4)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (6, 17, -7, 10)$

Déterminer si la famille est libre en utilisant tout ou partie des méthodes suivantes:

M1: résoudre l'équation $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}$

M2: calculer le rang de la famille

M3: calculer le déterminant de la famille

M4: astuces diverses

Exercise 1.0.4 ♡♡ *Familles génératrices*

On considère les familles ci-dessous:

(i) $E = \mathbb{R}^2 : \ \overrightarrow{a}_1 = (1, 2)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (2, 5)$

(ii) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (1, 1, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (0, 1, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_4 = (1, 1, 1)$

(iii) $E = \mathbb{R}^4 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 0, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (1, 1, 0, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (1, 1, 1, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$

Déterminer si la famille est génératrice de E *en utilisant tout ou partie des méthodes suivantes:*

M1: résoudre l'équation $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{u}$ *pour* $\overrightarrow{u} \in E$ *quelconque*

M4: astuces diverses

Exercise 1.0.5 ♡♡ *Bases*

On considère les familles ci-dessous:

(i) $E = \mathbb{R}^2 : \ \overrightarrow{a}_1 = (-4, 6)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (6, -9)$

(ii) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 1, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (0, 1, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (0, 0, 1)$

(iii) $E = \mathbb{R}^4 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 1, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_2 = (1, 0, -1, 0)\,, \ \overrightarrow{a}_3 = (0, 1, 0, 1)\,, \ \overrightarrow{a}_4 = (0, 1, 0, -1)$

Déterminer si la famille est une base de E*.*

Exercise 1.0.6 ♡ *Familles libres et familles génératrices 1*

1. (i) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ *sont-ils toujours libres? parfois générateurs de* $\mathbb{R}^2$ *?*

(ii) Même question dans $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^4$*.*

2. (i) Trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ *sont-ils parfois libres? toujours générateurs de* $\mathbb{R}^2$ *?*

(ii) Même question dans $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercise 1.0.7 $\heartsuit$ *Familles libres et familles génératrices 2*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ est libre et la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est liée. Quelles sont les affirmations justes parmi celles ci-dessous?

(i) $\overrightarrow{a}$ est CL de $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ (ii) $\overrightarrow{b}$ est CL de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ (iii) $\overrightarrow{c}$ est CL de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

2. (i) Dans $\mathbb{R}^3$ on émet l'hypothèse que la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$ est génératrice, la famille $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est liée et la famille $\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est libre. Est-ce possible? Si oui extraire une famille libre maximale de $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right)$.

(ii) Même question dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercise 1.0.8 $\heartsuit\heartsuit$ *Changement de base 1*

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (3, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (x, y)$ dans cette base.

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercise 1.0.9 $\heartsuit$ *Changement de base 2*

1. On considère une base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ de $\mathbb{R}^2$ et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

2. On considère une base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Chapter 2 Sous-espace vectoriel

Exercise 2.0.10 ♡♡ *EC*

1. Dans $\mathbb{R}^2$.

(i) Déterminer une EC de la droite D *de VD* $\overrightarrow{a} = (-1, 2)$.

(ii) Déterminer une EC de la droite D *de VN* $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$.

(i) Déterminer une EC du plan P *de base* $\overrightarrow{a} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 3)$. *Le vecteur* $\overrightarrow{c} = (1, 2, 9)$ *est-il orthogonal à* P?

(ii) Déterminer une EC du plan P *de VN* $\overrightarrow{n} = (1, 0, 2)$. *Le vecteur* $\overrightarrow{c} = (-2, 3, 1)$ *appartient-il à* P?

Exercise 2.0.11 ♡♡ *RP*

1. Dans $\mathbb{R}^2$. *Déterminer une RP de la droite* D *de VD* $\overrightarrow{a} = (2, 3)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$. *Déterminer une RP du plan* P *de base* $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 0, 3)$. *Le vecteur* $\overrightarrow{c} = (3, 1, -5)$ *appartient-il à* P *?*

Exercise 2.0.12 ♡♡ *RP↔EC*

Dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une EC du plan $P : x = 2s - t,\ y = t,\ z = s + t$. *La droite* $D : x = u,\ y = 2u,\ z = -u$ *est-elle incluse dans* P *?*

2. Déterminer une RP du plan $P : 3x + y - z = 0$. *La droite* $D : x = 6u,\ y = 2u,\ z = -2u$ *est-elle orthogonale à* P *?*

Exercise 2.0.13 ♡♡ *Sous-espace engendré par une famille*

Déterminer une base des sous-espaces de E *engendrés par les familles ci-dessous:*

(i) $E = \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 0, 1),\ \overrightarrow{a}_2 = (-1, 1, 2),\ \overrightarrow{a}_3 = (2, -1, -1)$

(ii) $E = \mathbb{R}^4 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 2, -4, 3),\ \overrightarrow{a}_2 = (2, 5, -3, 4),\ \overrightarrow{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$

(iii) $E = \mathbb{R}^4 : \overrightarrow{a}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \overrightarrow{a}_2 = (1, 0, -1, 0),\ \overrightarrow{a}_3 = (3, 2, 1, 2),\ \overrightarrow{a}_4 = (2, -1, -4, -1)$

Exercise 2.0.14 ♡♡ *Sous-espace intersection d'hyperplans*

Déterminer une base des sous-espaces de E *définis par les SEC ci-dessous:*

(i) $E = \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0,\ x + y - z = 0,\ -x - 4y + 2z = 0$

(ii) $E = \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ 2x_1 + x_3 = 0,\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$.

Exercise 2.0.15 ♡ *Intersection de sous-espaces 1*

On considère les sous-espaces E_1 *et* E_2 *suivants dans* $\mathbb{R}^3$:

(i) $E_1 = \operatorname{vect}(\overrightarrow{a}),\ E_2 = \operatorname{vect}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$, *avec* $\overrightarrow{a} = (5, 1, 3)$, $\overrightarrow{b} = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{c} = (2, -1, 1)$

(ii) $E_1 : x + y - 3z = 0,\ E_2 = \operatorname{vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$, *avec* $\overrightarrow{a} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (1, 0, -1)$

(iii) $E_1 : 2y - z = 0,\ x + y - 3z = 0,\ E_2 = \operatorname{vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$, *avec* $\overrightarrow{a} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (1, 0, -1)$

(iv) $E_1 = \operatorname{vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right),\ E_2 = \operatorname{vect}(\overrightarrow{c}, d)$, *avec* $\overrightarrow{a} = (2, -1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, -2)$, $\overrightarrow{c} = (1, 3, 0)$, $d = (3, 0, -1)$

Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

Exercise 2.0.16 ♡ *Intersection de sous-espaces 2*

On considère les sous-espaces E_1 et E_2 suivants dans $\mathbb{R}^3$:

(i) $E_1 : x = 2s,\ y = -s,\ z = s, \quad E_2 : x = u + 2v,\ y = 3u - v,\ z = u + v$

(ii) $E_1 : x + y - 3z = 0, \quad E_2 : x + y + z = 0$

(iii) $E_1 : 2y - z = 0,\ x + y - 3z = 0, \quad E_2 : x + y + z = 0$

(iv) $E_1 : x = 2s - t,\ y = -s + t,\ z = s - 2t, \quad E_2 : x = u + 2v,\ y = 3u - v,\ z = v$

Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

Exercise 2.0.17 ♡ *Supplémentaire orthogonal*

On considère les sous-espaces F suivants dans E :

(i) $E = \mathbb{R}^2$ *et* $F : x + 2y = 0$

(ii) $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F : x + y + z = 0$

(iii) $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \operatorname{vect}((1, 0, 1), (1, 1, 1))$

(iv) $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \operatorname{vect}((2, -1, 1))$

Donner une base du supplémentaire orthogonal de F.

Exercise 2.0.18 ♡♡ *Image, Noyau*

On considère les matrices suivantes:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *(iv)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. *Quel est l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée des applications linéaires associées?*
2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker} A$ *et de* $\operatorname{Im} A$.

Chapter 3 Synthèse

Exercise 3.0.19 *Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont égaux.

2. Peut-on déterminer les réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y)$ appartienne à E.

Exercise 3.0.20 *Soient P et Q les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par*

$$\begin{aligned} P &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x+y+z=0 \text{ et } x-t=0\right\}, \\ Q &= \operatorname{vect}\left\{(1,1,0,1), (1,0,0,2), (2,3,0,1)\right\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer une base et la dimension de P et Q.

2. Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que v appartienne à Q.

3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = P \oplus Q$.

Exercise 3.0.21 *Soit (Σ) le système d'équations linéaires*

$$\left\{ \begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \\ x - t &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (Σ) forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F.

Exercise 3.0.22 *1. Justifier que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-2z = t \text{ et } t-x+y = 0\}$ est un espace vectoriel.*

2. Expliciter une famille génératrice.

3. On note $G_1 = \operatorname{vect}\{(0,1,1,0), (-1,4,0,1)\}$ et $G_2 = \operatorname{vect}\{(0,-1,1,0), (-1,4,0,1)\}$. Est-ce que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$? Est-ce que $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Exercise 3.0.23 *Soit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice en base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $u(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Calculer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

3. Soit $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $b \in \operatorname{Ker} u$ et $c \in \operatorname{Im} u$ tels que $a = b + c$.