

Corrigé du test 4

$$1) \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}.$$

Compte tenu des formules d'Euler c'est $\frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$.

2) Comme $32i = 32e^{\frac{i\pi}{2}}$ est la puissance cinquième de $2e^{\frac{i\pi}{10}}$, les solutions de l'équation $z^5 = 32i = 32e^{\frac{i\pi}{2}}$ sont $z = 2e^{\frac{i\pi(1+4k)}{10}}$ (compte tenu que la puissance cinquième de $e^{\frac{i\pi 4k}{10}}$ est 1). On peut prendre pour valeurs de k , 0, 1, 2, 3, 4.

$$3) \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ donc } \sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}. \text{ On remplace } \cos^2(2x) \text{ par } \frac{1 + \cos(4x)}{2} \text{ et on obtient } \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$