Test 9

1) Soit f l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par $f(x) = x^2$.

a) Justifier qu'elle admet une application réciproque, qu'on appellera g et qui est une application de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

b) Calculer $g(x)$ et démontrer que g n'est pas dérivable en $x = 0$, en utilisant la définition de la dérivée.

c) Peut-on utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées pour démontrer que les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 0$? (si possible, sans calculer leurs dérivées)

$h_1(x) = g(1 - x^2)$ (avec $x \in [-1, 1]$),

$h_2(x) = g(x + x^2)$ (avec $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$).

2) Soit f une fonction dérivable périodique, c'est à dire telle qu'il existe un réel $T \neq 0$ pour lequel

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

a) Démontrer qu'il existe une infinité de réels x tels que $f(x) = 0$.

b) Démontrer au moyen du théorème de Rolle qu'il existe une infinité de réels x tels que $f'(x) = 0$ (ne pas oublier de démontrer que ces réels sont distincts).

c) Les résultats des questions a) et b) permettent-ils de dire que les fonctions $f(x) = e^{\sin x} - \cos x$, $g(x) = e^{\sin x} + \cos x$ et $h(x) = e^{\sin x} + 2\cos x$ s'annulent pour une infinité de valeurs de x ainsi que leurs dérivées? (inutile de calculer ces dérivées)