COURS DE LICENCE 2IÈME ANNÉE 2005 –ANALYSE 2

— Séries Numériques
— Suites et Séries des fonctions
— Séries entières
— Séries de Fourier
un livre: Liret et Martinais "Mathématiques pour le DEUG — Analyse 2ième année"

1. Convergence des Séries

Le problème:

$$\begin{gathered}
1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \dots \\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots \\
1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \dots \\
1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \\
1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \dots
\end{gathered}$$

celui de terme générale $\frac{1}{n^\alpha}$ s'appelle la série de Riemann ou série harmonique d'exposant α.

Plus tard on considère

$$\begin{gathered}
\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx + \dots \\
f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \dots
\end{gathered}$$

Définition 1.1. *Soit a_n une suite d'éléments de K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

On dit que la série $\sum a_n$ de terme général a_n est convergente si la suite $S_p = \sum_{i=1}^{p} a_i$ des sommes partielles est convergente, et sa somme est $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ Sinon, on dit que la série $\sum a_n$ de terme général a_n est divergente.

Souvenez que la suite $\{S_n\}$ converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un N t.q. pour tout $m, m' > N$, on a $|S_m - S_{m'}| < \epsilon$.

Exemples:

• $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$ $S_p = 1 + x + x^2 + \cdots + x^p$ et

$$S_p - xS_p = 1 - x^{p+1} \implies S_p = \frac{1 - x^{p+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{p+1}}{1-x} \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

Il est clair que la suite $\{S_p\}$ converge vers $\frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$, et ne converge pas si $|x| > 1$.

Quoi faire dans le cas $x = 1$?

• $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$

Considérer

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

On voit que cette suite ne converge pas, et elle est une sous-suite de la suite des sommes partielles. Donc la somme n'existe pas (dans le sens plus précis qu'il est infini).

• $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Les sommes partielles alternent entre les valeurs 1 et 0. Pas de convergence.

• $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots$

Noter que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc pour la somme partielle on a

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Quelques propriétés élémentaires:

Proposition 1.2. *Soit $\sum a_n$ une série qui converge avec somme S.*
Alors :
1) $a_n \to 0$;
2) pour tout entier fixé $p \geq 0$, la série $\sum a_{p+n}$ converge vers $S - S_{p-1}$;
3) la série $r_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ converge vers 0;
4) la série $\sum \lambda a_n$ converge pour tout λ.
5) si $\sum b_n$ converge avec somme T, alors pour tout α, β, $\alpha a_n + \beta b_n$ converge avec somme $\alpha S + \beta T$.

Demonstration. 1) Soit $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles. Alors supposons que $S_n \to S$. Poser $\sigma_n = S_{n+1},\ n = 0, 1, 2, \dots$; alors la suite $\{\sigma_n\}$ converge aussi vers S. Mais on a, utilisant les résultats sur les suites,

(si $a_n \to a$ et $b_n \to b$ alors $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$ pour tout $\alpha, \beta \in K$)

$a_{n+1} = \sigma_n - S_n \to S - S = 0$.

2) La somme partielle T_n de $\sum a_{p+n}$ est

$T_n = a_p + a_{p+1} + \dots a_{p+n} = S_{p+n} - S_{p-1}$. Donc par la propriété des suites, $T_n \to S - S_{p-1}$.

3) $S = S_{n-1} + r_n \iff S - S_{n-1} = r_n$, donc $r_n \to 0$.

4) la somme partielle de $\sum \lambda a_n$ est $S'_n = \lambda S_n$.

5) la somme partielle de $\sum \alpha a_n + \beta b_n$ est

$$\begin{aligned} U_n &= (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots (\alpha a_n + \beta b_n) \\ &= (\alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots + \alpha a_n) + (\beta b_1 + \beta b_2 + \dots \beta b_n) \\ &= \alpha S_n + \beta T_n \end{aligned}$$

□

Le converse de 1) est faux, étant donné que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Dans 2) on pourrait également ajouter ou enlever un nombre fini de termes de la série, sans changer sa nature convergente/divergente.

Dans 4), pour $\lambda \neq 0$, $\sum a_n$ converge si et seulement si $\lambda \sum a_n$ converge.

La partie 5) montre aussi que, pour une série complexe $\sum z_n$ où $z_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, on a $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et dans ce cas, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Définition 1.3. Convergence absolue

On dit que la série $\sum a_n$ est absolument convergente quand la série de terme général $|a_n|$ est convergente.

Cette définition dérive son utilité du :

Théorème 1.4. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Demonstration. Rappelons que la suite des sommes partielles $\{S_n\}$, $S_n = \sum_{i=1}^n$ converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un N t.q. pour tout $m, m' > N$ on a $|S_m - S_{m'}| < \epsilon$ (disons vite: $|S_m - S_{m'}| \to 0$).

Ici on a (supposer $m' > m$)

$|S_m - S_{m'}| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m'}| \leq |a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_{m'}|$.

La convergence absolue implique alors la convergence. □

Noter que pour une série absolument convergente, $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Aussi la somme de deux série absolument convergentes est convergente.

Quelques propriétés des séries à termes positifs

Théorème 1.5. La règle de comparaison

Soit $\sum a_n$ une série t.q. $0 \leq a_n$ pour tout n.

1) La série $\sum a_n$ est convergent si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée.

2) Soit $\sum b_n$ une série t.q. $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n. Si $\sum b_n$ est convergente, $\sum a_n$ est convergente.

Si $\sum a_n$ est divergente, $\sum b_n$ est divergente.

Demonstration. 1) La suite des sommes partielles est croissante.

2) On a pour tout n, $0 \leq \sum_{n=1}^n a_n = S_n \leq T_n = \sum_{n=1}^n b_n$. Donc si $\{T_n\}$ est borné, $\{S_n\}$ est borné, et si S_n n'est pas borné, alors $\{T_n\}$ n'est pas borné. □

Exemples :

• $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2}^n$ donc $\sum \frac{1}{n!}$ converge, et la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 3$$

• Pour $\alpha < 1$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge implique $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

Pour le cas $\alpha > 1$, on note que

$$\begin{aligned}
&1+(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha})+(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha})+\dots(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+\dots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha})\\
&<1+(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha})+(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha})+\dots+(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+\dots+\frac{1}{(2^k)^\alpha})\\
&=1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\dots+\frac{2^k}{(2^k)^\alpha}\\
&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^2}+\dots+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^k}\\
&<\frac{1}{1-K}\quad\text{où}\quad K=\frac{1}{2^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Remarque: cette règle de comparaison en 2) peut se généraliser à la forme: s'il existe un $N > 0$ t.q. $0 \le a_n \le b_n$ pour tout $n > N$, alors...

De cette remarque on déduit:

Corollaire 1.6. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes strictement positifs, t.q. $a_n/b_n \to \ell > 0$, alors soit les deux séries convergent, soit les deux séries divergent (les deux séries ont le même caractère convergent ou divergent).*

Demonstration. Comme les termes sont positifs, et $\ell > 0$, il existe des réels α, β t.q. pour tout n

$0 < \alpha < a_n/b_n < \beta \iff 0 < \alpha b_n < a_n < \beta b_n$. Il en suit qu'une des séries est bornée si et seulement si l'autre l'est.

□

Exemple:

$a_n = \frac{1}{n^2}$ et $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$: $a_n/b_n = \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$. Mais on sait que $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge, donc $a_n = \frac{1}{n^2}$ aussi.

Théorème 1.7. Règle de Riemann

Soit $\sum a_n$ une série t.q. $a_n \ge 0$ pour tout n, et soit α un nombre réel positif.

Si $n^\alpha a_n \to L$ avec $\infty > L > 0$, alors la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha > 1$ et $n^\alpha a_n \to 0$, alors la série $\sum a_n$ converge.

Si $na_n \to \infty$ alors la série $\sum a_n$ diverge.

Demonstration. Utiliser le corollaire à la règle de comparaison avec la série $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Alors $a_n/b_n = n^\alpha a_n$, et si cette suite a une limite finie non–nulle, alors les séries convergent ou divergent ensemble. Mais la série $\sum b_n$ converge quand $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$

Si $n^\alpha a_n \to 0$, pour n assez grand, on a $n^\alpha a_n < 1 \implies a_n < \frac{1}{n^\alpha}$. Et si $\alpha > 1$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, et donc $\sum a_n$ aussi.

Si $na_n \to \infty$, pour n assez grand, on a $na_n > 1 \implies a_n > \frac{1}{n}$, et donc la série $\sum a_n$ diverge.

□

exemples:

• $a_n = \frac{\log n}{n^2}$

Alors $n^{3/2} a_n = \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ et ceci tend vers 0.

Donc la règle s'applique et la série $\sum a_n$ converge.

• $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$: on a $n \frac{1}{\sqrt{n}\log n} = \frac{\sqrt{n}}{\log n}$ et ceci tend vers ∞. Donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ diverge.

Théorème 1.8. Règle de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

S'il existe $L < 1$ t.q. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L$ pour tout n, alors $\sum a_n$ converge.

• Danger!!: Il faut $L < 1$ strictement: $\frac{1}{n+1}/\frac{1}{n} = n/n+1 \to 1$, mais série divergente.

• On peut appliquer ceci à la suites géométrique $\sum b^n$: ici on a $a_{n+1}/a_n = \frac{b^{n+1}}{b^n} = b$. La règle s'applique quand $b > 1$.

Demonstration. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L$, alors $a_{n+1} \leq La_n \leq L^2 a_{n-1} \leq \ldots L^n a_1$. On peut utiliser la règle de comparaison avec la série géométrique $a_1 \sum L^n$, qui converge si $L < 1$.

□

Théorème 1.9. Règle de Cauchy

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs ou nuls,.

S'il existe un $K < 1$ t.q. $\sqrt[n]{a_n} \leq K$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

Demonstration. Si $\sqrt[n]{a_n} \leq K$, alors $a_n \leq K^n$ et la règle de comparaison dit que $\sum a_n$ converge si $K < 1$.

□

Exemple: Considérer $\sum \frac{x^n}{n^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt[n]{|\frac{x^n}{n^n}|} = \frac{|x|}{n}$ et ceci tend vers 0 pour tout x. La règle de Cauchy nous dit que la série originelle $\sum \frac{x^n}{n^n}$ est absolument convergente, et donc convergente.

Les séries alternées

Définition 1.10. *Une série $\sum a_n$ de termes réels est dite alternée si pour tout n, $a_n = (-1)^n |a_n|$.*

Théorème 1.11. Règle de Leibnitz
Soit $\sum (-1)^n b_n$ avec $b_n \geq 0$ (une série réelle alternée).
Si la suite $\{b_n\}$ décroissante et tend vers 0, alors la série est convergente, et sa somme S satisfait $b_0 - b_1 < S < b_0$.

Demonstration. Soit S_m la somme partielle.

$$\begin{aligned}
|S_{m'} - S_m| &= |(-1)^{m+1} b_{m+1} + \cdots + (-1)^{m'} b_{m'}| \\
&= |b_{m+1} - b_{m+2} + \cdots + (-1)^{m'-m} b_{m'}| \\
&= \begin{cases} |(b_{m+1} - b_{m+2}) + (b_{m+3} - b_{m+4}) + \cdots + (b_{m'-1} - b_{m'})| \text{ si } m' - m \text{ pair} \\ |(b_{m+1} - b_{m+2}) + (b_{m+3} - b_{m+4}) + \cdots + b_{m'}| \text{ si } m' - m \text{ impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais $b_n \searrow 0$ implique $b_k - b_{k+1} \geq 0$, et on a une somme de termes positifs, et (quand $m' - m$ est pair — le cas $m' - m$ impair est un exercice)

$$\begin{aligned}
|S_{m'} - S_m| &= (b_{m+1} - b_{m+2}) + (b_{m+3} - b_{m+4}) + \cdots + (b_{m'-1} - b_{m'}) \\
&= b_{m+1} - (b_{m+2} - b_{m+3}) - (b_{m+4} - b_{m+5}) - \cdots - b_{m'}
\end{aligned}$$

Conclusion: $|S_{m'} - S_m| \leq b_{m+1}$ et quand $m, m' \to \infty$, $b_{m+1} \to 0$ et la suite des sommes partielles est convergente: la série originelle converge.

□

exemple: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Théorème 1.12. La règle d'Abel

Théorème 1.13. Comparaison avec une intégrale généralisée
Soit $c > 0$ et $f : [c, \infty] \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive décroissante.
Alors la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_c^\infty f(x)dx$ converge.

Demonstration. L'intégrale converge si $\int_c^x f(t)dt$ a une limite quand $x \to \infty$.
Soit c' un entier t.q. $c \leq c'$.

On voit que

$$f(c'+1) + \cdots + f(n) < \int_{c'}^{n} f(t)dt < f(c') + f(c'+1) + \cdots + f(n-1)$$

Donc la somme partielle $S_n = f(1) + \cdots + f(c') + f(c'+1) + \cdots + f(n)$ est borné par :

$$f(1) + \cdots + f(c'-1) + \int_{c'}^{n+1} f(t)dt < S_n < f(1) + \cdots + f(c') + \int_{c'}^{n} f(t)dt$$

Les sommes forment une suite monotone croissante, et l'intégrale $\int_c^x f(t)dt$ est aussi croissante en x. L'une est bornée si et seulement si l'autre est bornée. $\square$