COURS DE DEUG FÉVRIER 2005 –ANALYSE

3. Convergence des séries des fonctions

Définition 3.1. *Soient $f_0, f_1, f_2, \cdots : I \to \mathbb{R}$ des fonctions. On dit que la série $\sum f_n$ est convergent sur I si pour tout $x \in I$, la série de terme général $f_n(x)$ est convergent. Dans ce cas on définit la fonction $f = \sum f_n$ par $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_n(x)$.*

C'est à dire, la somme $\sum f_n$ est convergent sur I si les sommes $\sum f_n(x)$ sont convergentes pour tout $x \in I$.

Exemple standard:

Poser $f_n(x) = x^n$. La série de terme général x^n est la série géométrique, et converge pour $|x| < 1$: $\sum f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in (-1, 1)$.

Autre exemple non–standard: $f_n = (-1)^n \frac{2-sin^2 x}{n^3}$. Comme on a une suite alternée d'une suite décroissante la série $\sum f_n$ a une limite.

Propriétés:

Soit $\sum f_n$ une série convergente avec somme f.

(1) Si toutes les fonctions f_n sont croissantes sur I, alors f est croissante sur I.
(2) Si I est symétrique autour de 0 et les fonctions f_n sont (im)paires, alors f est (im)paire.
(3) Si $I = \mathbb{R}$ et les f_n ont tous périodes T, alors f aussi est de période T.

Définition 3.2. *La série des fonctions $\sum f_n$ définies sur I. On dit que $\sum f_n$ est* normalement convergent *si $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge sur I; s'il existe une série convergente $\sum a_n$ de réels positifs tels que pour tout $x \in I$, et pour tout n, on a $|f_n(x)| < a_n$.*

exemple. L'exemple standard $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $[0, b]$ avec $b < 1$ est normalement convergente.

Autre exemple: $f_n = (-1)^n \frac{2-sin^2 x}{n^3}$ on peut prendre $a_n = 5/n^3$.

Comme toute série absolument convergente est convergente,

Proposition 3.3. *Toute série normalement convergente sur I est convergente sur I.*

propriétés:

Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ sont normalement convergentes sur I, alors $\sum(f_n + g_n)$ et $\sum \lambda f_n$ convergent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.4. *Soit $\sum f_n$ une série des fonctions définies sur I et soit $x_0 \in I$. Supposons que pour tout n, $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existe et est finie.*

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors

$$\sum \lim_{x\to x_0} f_n(x) \text{ converge, et } \sum \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum f_n(x)$$

Demonstration. Comme $\sum f_n$ converge normalement, elle converge aussi, et $f = \sum f_n$ est définie sur I. La convergence uniforme nous dit qu'il existe $\{a_n\}$ telle que $|f_n(x)| < a_n$ pour tout $x \in I$. Poser $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$; alors $\ell_n \leq a_n$, et donc la suite $\{\ell_n\}$ est absolument convergente, et donc convergente. Posons $\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n$. Comme $\sum a_n$ est convergente, $\sum_p^{\infty} a_n \to 0$.

Supposons $\epsilon > 0$ donné; choisir N tel que $p > N \implies \sum_p^{\infty} a_n < \epsilon/2$.

Considérer:

$$\begin{aligned}|f(x)-\ell| &= |\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(x)-\ell_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)-\ell_n| \\ &= \sum_{n=0}^{N}|f_n(x)-\ell_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|f_n(x)-\ell_n|\end{aligned}$$

Le dernier terme est plus petit que $2\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n < \epsilon/2$ pour tout $x \in I$.

Quand $x \to x_0$, on a $|f_n(x)-\ell_n| \to 0$, et donc la somme des premiers N telles fonctions tend vers 0.

C'est à dire, il existe un δ tel que

$$|x-x_0| < \delta \implies \sum_{n=0}^{N}|f_n(x)-\ell_n| < \epsilon/2$$

□

On a alors:

Corollaire 3.5. *Supposons que $\sum f_n$ est normalement convergente sur I, avec somme $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.*

Si les f_n sont continues en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0 et si elles sont toutes continues sur toute l'intervalle I, alors f est aussi continue sur I.

Définition 3.6. *On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si la suite $S_m = \sum_{n=0}^{m} f_n$ des sommes partielles converge uniformément.*

Quand $\sum f_n$ converge simplement, on peut poser

$R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{p\to\infty}\sum_{n=m+1}^{p} f_n$ le reste d'ordre m de la série; alors la convergence simple équivaut la convergence uniforme si les restes tend uniformément vers 0.

Proposition 3.7. *Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors la série converge uniformément sur I.*

Demonstration. Comme on a dit avant, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge. Il suffit alors de regarder les restes:

$$|\sum_{k=m+1}^{p} f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{p} \sup_{x\in I} |f_k(x)|$$

et on a $|R_n(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x)|$

$\square$

Proposition 3.8. *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et les f_n sont continue sur I, alors la somme $\sum f_n$ est continue sur I.*

Demonstration. La suite $F_p = \sum_{n=0}^{p} f_n$ converge uniformément sur I et les F_p sont continues, donc la limite est continue. $\square$

Il en suit que une série normalement convergente des fonctions continues est aussi continue.

Exemple: Fonction zeta de Riemann: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$. Noter que sur l'intervalle $[a, \infty[$ pour $a > 1$, $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = [\frac{-1}{(a-1)x^{a-1}}]_1^{\infty} = \frac{1}{(a-1)}$.

Donc ζ est continue.

Noter que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Intégration

Proposition 3.9. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions continues qui converge uniformément sur* $[a, b]$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt$ *converge, et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt$$

Demonstration. $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$ est une suite uniformément convergente sur $[a, b]$

□

Dérivation:

Proposition 3.10. *Soit* I *un intervalle et* $\sum f_n$ *une série de fonctions de classe* C^1 *qui convergente simplement.*

Si la série $\sum f_n'$ *converge uniformément sur* I*, alors la somme* $F = \sum f_n$ *est de classe* C^1 *sur* I*, et pour tout* $x \in I$*, on a* $F'(x) = \sum f_n'(x)$.

Demonstration. La suite $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k'$ satisfait les conditions du théorème sur les suites. □