COURS DE DEUG FÉVRIER 2004 –ANALYSE

4. SERIE ENTIERES

On va étudier les séries complexes.

Définition 4.1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes. La* série entière *associé est* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ... *les* a_n *sont les coefficients de la série.*

Lemme 4.2. *Soient* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$. *Si la suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolument pour* $|z| < |z_0|$.

Demonstration. Si $|z| < |z_0|$, $|z/z_0| < 1$ et donc si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \, |(z/z_0)^n| \to 0$ et la série converge absolument. $\square$

Définition 4.3. *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière. Soit* $I \subset \mathbb{R}^+$ *l'intervalle des nombres réels positifs tels que* $\sum |a_n| r^n$ *converge.*

Si I *est majoré, alors* $R = \sup I$ *est le rayon de convergence de la série entière.'Sinon, le rayon de convergence est infini.*

Alternativement, $J = \{r \mid \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.
Montrer $\sup I = \sup J$:
On voit que $J \subset I$. Le lemme montre que $I \subset J$.

Proposition 4.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence R. Alors $R = sup\{r \in \mathbb{R} \mid sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|r^n < +\infty\}$.*

Demonstration. Poser $K = sup\{r \in \mathbb{R} \mid sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|r^n < +\infty\}$.

(i) Si $|z| > K$ alors

(ii) Si $|z| < K$ et $|z| < r < K$

$\square$

Proposition 4.5. *$s(z) = \sum a_n z^n$ est une fonction continue en z dans $IntD^R$.*

Exemples (i) $\sum z^n$ (ii) $\sum \frac{z^n}{n}$

Tous les deux ont rayon de convergence 1.

Rappel

Proposition 4.6.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Demonstration. Test de Cauchy: Si $\limsup_{n\to\infty}(|a_n z^n|)^{\frac{1}{n}} < 1$ alors $\sum a_n z^n$ converge.

Mais $\limsup_{n\to\infty}(|a_n z^n|)^{\frac{1}{n}} = |z| \limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$. Donc si

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}}$$

la série entière converge absolument.

Si $\limsup_{n\to\infty}(|a_n z^n|)^{\frac{1}{n}} > 1$ alors le terme générale $a_n z_n \not\to 0$ et la série diverge.

$\square$

Proposition 4.7. *Supposons que $a_n \neq 0$ pour tout n.*

Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$ *alors* $\frac{1}{R} = L$.

Demonstration. test de d'Alembert:

Si $|z| < \frac{1}{L}$ alors $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}| < 1$ et $\sum a_n z^n$ converge.

Si $|z| > \frac{1}{L}$ alors terme générale ne tend pas vers 0.

□

Corollaire 4.8. *Si* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$ *alors* $\lim_{n\in\mathbb{N}}(|a_n|)^{\frac{1}{n}})$ *existe et vaut* L

Demonstration. Attention il s'agit de changer le limsup en lim!!!!

□

Exemples

(i) Si $P(n)$ est un polynôme en n, alors $\sum P(n)z^n$ satisfait $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{P(n+1)}{P(n)}| = 1$. Si le degré du polynôme est k, on a $\frac{P(n+1)}{P(n)}| = |c_k(n+1)^k + \ldots c_k n^k + \ldots|$ et la limite de ceci est 1.

(ii) $\sum \frac{z^n}{n!}$: $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1/(n+1)!}{1/n!}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n+1}| = 0$ donc rayon $= \infty$.

Proposition 4.9. *Soit* $\sum a_n z^n$ $\sum b_n z^n$ *deux séries entières avec rayons de convergence* R_a, R_b. *Soit* $\mu, \lambda \in C$, *et noter* $s_a(z), s_b(z)$ *les deux sommes associées aux séries entières.*

(i) $\sum(\mu a_n + \lambda b_n)z^n$ *a rayon de convergence au moins* $\min\{R_a, R_b\}$ *et somme* $\mu s_a(z) + \lambda s_b(z)$.

(ii) La série $\sum c_n z^n$ *où* $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ *a rayon de convergence au moins* $\min\{R_a, R_b\}$ *et somme* $s_a(z).s_b(z)$.

Demonstration. pour $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ les séries convergent donc les opérations sur les séries sont légitimes. □

Exemple

Considérer $s(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$.

Alors
$$\sum \frac{z^n}{n!} \sum \frac{z'^n}{n!} = \sum (\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}) = \sum (\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} z^k z'^{n-k})$$
et ceci est $\sum \frac{(z+z')^n}{n!}$.
Donc $s(z+z') = s(z).s(z')$.

Proposition 4.10. *Soit $\sum a_n z^n$ $\sum b_n z^n$ deux séries entières avec rayons de convergence R_a, R_b. Supposons $\exists \alpha > 0$ avec $\alpha < R_b$ et $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \alpha^i < R_a$.*

Alors il existe une série entière de rayon de convergence au moins α et somme $s_a \circ s_b(z)$.

Demonstration. Poser $r = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \alpha^i$

$(S_b(z))^k$ est la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) z^n$ de rayon $\geq R_b$ (utilisant la proposition précédente).

On a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(k)||z^n| \leq (\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||z^n|)^k = r^k$.

Si $|z| \leq \alpha$ alors $\sum a_k (s_b(z))^k$converge absolument, car $r < R_a$.

□

<u>Exemple</u> $s(z+a) = a_0 + a_1(z+a) + a_2(z+a)^2 + \cdots = \sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^n a_{n+k} a^k$.

Corollaire 4.11. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence $R \neq 0$, et avec somme $s(z)$ et avec $a_0 \neq 0$.*

Alors il existe une série entière $c_n z^n$ de rayon de convergence $R' \neq 0$ et de somme $\sigma(z)$ t.q. $\forall z$ avec $|z| < \min\{R, R'\}$ on a $s(z).\sigma(z) = 1$.

Demonstration. Pour $z < R$ poser $s(z) = a_0(1 - u(z))$ avec $u(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n = \sum b_n z^n$.

Considérer la série $\sum u^n$ de rayon 1.

On veut y mettre $u(z)$ au lieu de u dans la somme $\frac{1}{1-u}$.

Comme $u(z)$ est continue, et $u(z) \to 0$ quand $z \to 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $|z| < \alpha \implies |u(z)| < 1$.

Comme $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ quand $|u| < 1$ la somme $\frac{1}{a_0(1-u(z))}$ a une série entière $\sum c_n z^n$ de rayon non–nul et $\sum a_n z^n \sum c_n z^n = 1$

Noter que $a_0 c_0 = 1$ et $a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \cdots + a_n c_0 = 0$. □

Différentiation et Intégration

Théorème 4.12. *Soit $a_n z^n$ une série entière de somme s et de rayon de convergence R. Les séries entières*

$$\sum n a_n z^{n-1}, \ \sum n(n-2) a_n z^{n-2}, \ \ldots, \ \sum n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont rayon R aussi.

Demonstration. Considérer $\limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n} = 1/R$ et noter que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. □

Pour parler de différentiation et intégration on va restreindre les variables a $\mathbb{R}$, et donc le rayon de convergence parle de l'intervalle $]-R, R[$.

Corollaire 4.13. *Soit $a_n t^n$ une série entière de variable réelle t de somme s qui converge sur l'intervalle $]-R, R[$.*

Alors la fonction s est infiniment differentiable sur $]-R, R[$ et les dérivées sont des sommes des séries entières obtenues en dérivant terme à terme $a_n t^n$.

Demonstration. La série $a_n t^n$ converge uniformement sur $[r, r]$ pour $r < R$. □

Corollaire 4.14. *Soit $a_n t^n$ une série entière de variable réelle t de somme s qui converge sur l'intervalle $]-R, R[$.*

Alors pour tout k on a $s^k(0) = k! a_k$.

Corollaire 4.15. *Soit $a_n t^n$ une série entière de variable réelle t de somme s qui converge sur l'intervalle $]-R, R[$.*

Alors pour tout $t \in]-R, R[$ on a :

$$\int_0^t s(w)dw = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n w^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

Demonstration. $\sum a_n z^n$ converge uniformement sur $[-r, r]$ pour $r < R$ et donc la somme s est integrable terme à terme sur $]-R, R[$. $\square$

Définition 4.16. *Un fonction f de variable rélle t est développable en série entière à l'origine s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que $\forall t \in]-R, R[$ on a $f(t) = s(t)$.*

Un fonction f de variable complexe z est développable en série entière à l'origine s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que $\forall z$ t.q. $|z| < R$ on a $f(z) = s(z)$.

<u>Exemple</u> : $\frac{1}{1-z}$ est développable en série entière $\sum z^n$.

Proposition 4.17. *Toute fonction réelle développable à l'origine est de calsse C^{∞} sur l'intervalle de convergece, et comme $a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$, la série est unique.*

Définition 4.18. *Soit f une fonction d'un variable réelle t de classe C^{∞}. La série entière $\sum \frac{f^k(0)}{k!} t^k$ s'appelle la série de Taylor de f.*