COURS DE DEUG FÉVRIER 2004 –ANALYSE

1. SERIE ENTIERES CONT.

Les exemples:
Fonction exponentielle complexe

Définition 1.1. *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *on pose* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
et

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Toutes ses séries ont rayon de convergence ∞.

On a déjà montré que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, et donc:
$e^z \neq 0$ $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.

Noter que $(iy)^{2n} = (-1)^n y^{2n}$ et $(iy)^{2n+1} = i(-1)^n y^{2n+1}$ et b

Par les propositions avant on a:

Proposition 1.2.

- $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $\cosh z + \sinh z = e^z \quad \cosh z - \sinh z = e^{-z}$
- $\cos z + i \sin z = e^{iz}$
- $\cos z - i \sin z = e^{-iz}$
- $\cosh(z + z') = \cosh z \cosh z' + \sinh z \sinh z'$
- $\sinh(z + z') = \sinh z \cosh z' + \cosh z \sinh z'$
- $\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$
- $\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'$

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

Si l'on écrit les nombres complexes $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, et:

Proposition 1.3.

- $\mathcal{R}\, e^z = e^x \cos y$ *et* $\mathcal{I}m\, e^z = e^x \sin y$
- *La valeur absolue (le module) de e^z est égal à e^x.*
- *L'argument de e^z est égal à y.*

Proposition 1.4. *La fonction e^t est infiniment differentiable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $(e^t)' = e^t$.*

Demonstration. $(t^n/n!)' = t^{n-1}/(n-1)!$ et rayon de convergence est ∞.

□