Barême MAT01 P3
20 + 6 points
Barême

Exercice 1 (5 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

1. Montrer que $-x+\sqrt{x^2+1} = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$ pour tout réel x et étudier la parité de f.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

3. Calculer $f(\sinh x)$ pour tout réel x. Que peut-on en déduire ?

Solution.

1. (1.5 pt)
0.75 pt: $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = 1.$
0.75 pt: $f(-x) = \ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}\right] = -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x).$
2. (1.5 pt)
0.5 pt: $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$
1 pt: $f'(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$
3. (2 pt)
1 pt: $f(\sinh x) = \ln(\sinh x + \cosh x) = \ln(e^x) = x$
1 pt: f *est la réciproque de* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 + 6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}.$$

1. Donner le domaine de définition de f. Calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation en précisant les valeurs aux bornes.

2. La fonction f est-elle surjective ? est-elle injective ? (Justifier).

3. Calculer $f^{-1}(\{1\})$.

4. Déterminer $f([1, +\infty[)$.

5. Quel est le plus grand intervalle sur lequel f est strictement croissante ?

6. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

(i) Démontrer par récurrence que $0 \le u_n \le 1$ pour tout entier n.
(ii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
(iii) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\, dx$. (on pourra poser $x = t\sqrt{2}$).

Solution.

1. (2.5 pt)

0.5 pt: Domaine

1 pt: $f'(x) = -\frac{x^2+x-2}{(x^2+2)^2}$, *racines* $-2, 1$.

1 pt: tableau: variations $-+-$ *et bornes* $0, -1/2, 1, 0$; *aucune justification sur signe de* $f'(x)$.

2. (1.5 pt)

0.75 pt: non surjective car $f(x) = 2$ *impossible (sans autre justification)*

0.75 pt: non injective car $f(x) = 1/2$ *deux solutions (sans autre justification)*

3. (1 pt)

$f(x) = 1 \text{ ssi } (x-1)^2 = 1 : x = 1.$

4. (0.5 pt)

$f([1, +\infty[) =]0, 1]$ *par tableau de variations (sans autre justification).*

5. (0.5 pt)

$[-2, 1]$ *sans justification.*

hors barême

6. (3 pt)

(i) 1.5 pt

0.75 pt: $u_n \geq 0 : n = 0 \text{ clair}, u_n \geq 0 \Rightarrow f(u_n) \geq 0$ *sans justification.*

0.75 pt: $u_n \leq 1 : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$

(ii) 1 pt

$u_0 < u_1 \text{ et } u_n < u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) < f(u_{n+1})$.

(iii) 0.5 pt

Suite croissante majorée.

7. (3 pt)

0.5 pt: $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+1}{x^2+2}\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2+2}\, dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\, dx$.

1 pt: $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2+2}\, dx = \left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$

1.5 pt: $x = t\sqrt{2} \text{ donc } dx = \sqrt{2}dt \text{ et } x = 0, \sqrt{2} \Rightarrow t = 0, 1 :$

$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

Exercice 3 (5 points)
1. Calculer les primitives suivantes:

$$(i)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} \qquad (ii)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}\ \ (poser\ t = \tan x)$$

2. Calculer les intégrales suivantes:

$$(i)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\ dx \qquad (ii)\ \int_1^e x^{1/2} \ln x\ dx$$

Solution.

1. (2.5 pt)
1 pt: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int (x+1)^{-1/3}\ dx = \frac{(x+1)^{2/3}}{2/3}$.
1.5 pt: $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ donc $\int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\tan x|$.
2. (2.5 pt)
1 pt: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x+1}\ dx = [-\ln(\cos x + 1)]_0^{\pi/2} = \ln 2$.
1.5 pt: $\int_1^e x^{1/2} \ln x\ dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x\right]_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^{1/2}\ dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)\right]_1^e = \frac{2}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}$.

Exercice 4 (4 points)
On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}.$$

1. Montrer que

$$u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$$

pour tout $n \geq 2$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est bornée.
3. Calculer $\lim_{n \to \infty} u_n$.

Solution.

1. (1 pt)
$u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$ *ssi* $n - (-1)^n n \geq 0$, *ou directement par* $n + (-1)^n \leq n + 1$, $n - (-1)^n \geq n - 1$.
2. (2 pt)
1 pt: $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 2$ *: clair.*
1 pt: $u_n \leq \frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} \leq 3$.
2. (1 pt)
$\lim_{n \to \infty} u_n = 1$ *par gendarmes ou* $u_n = \frac{1+(-1)^n/n}{1-(-1)^n/n} \to 1$ *car* $(-1)^n/n \to 0$.