

MATHEMATIQUES 01

Partiel 2 – 29 novembre 2013

Calculatrice et documents non autorisés – Tableau de primitives au verso

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\cos(2x) = \cos(3x + \pi)$.
2. $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$ (on peut commencer par résoudre l'équation $2X^2 + X - 1 = 0$).
3. $e^{\cos(2x)} = 1$.

EXERCICE 2

1. Montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, pour tout $x \in [-1, 1]$.
2. Résoudre $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ (on rappelle que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$).

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f . Existe-t-il un réel x tel que $f(x) = 0$?
2. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ et calculer la dérivée de la fonction f .

EXERCICE 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; \pi[$, définie par $f(x) = 2 \arctan(e^x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition, noté D_f .
2. Déterminer son ensemble image, noté $Im(f)$.
3. Donner le domaine de dérivation de f et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation.
4. Montrer que f est une bijection. Donner sa fonction réciproque f^{-1} .
5. Donner le domaine de dérivation de sa réciproque f^{-1} et calculer la dérivée de f^{-1} .
6. Résoudre $f(x) = \pi/2$ et $f^{-1}(y) = \ln(\sqrt{3})$.

EXERCICE 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis les calculer.

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt, \quad F_2(x) = \int_{\pi}^x \sin^3(t) \cos(t) dt, \quad F_3(x) = \int_{-1}^x \frac{t+1}{t^2+2t+2} dt,$$
$$F_4(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{t^2+2t+2} dt; \text{ (indication : } t^2+2t+2 = 1 + (t+1)^2 \text{)}.$$

EXERCICE 6

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, puis la calculer en utilisant le changement de variable $x = 3t/2$.

$$I = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} dx.$$

EXERCICE 7

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, puis la calculer en utilisant une intégration par parties.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) e^{\sin(x)} dx.$$

Fonction f définie par	Primitive F de f	sur l'intervalle I
$f(x) = x^n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$	$] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[,$ $n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln \cos x + c, c \in \mathbb{R}$	$] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[,$ $n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \cosh x$	$F(x) = \sinh x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sinh x$	$F(x) = \cosh x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$F(x) = \tanh x + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'(x)u(x)^n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad u(x) > 0$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^n}, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$F(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{u(x)^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$	
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + c, c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln u(x) + c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad u(x) \neq 0$	