

Introduction en analyse

Planche 3

On rappelle que la notation $G(x) = \int g(x)dx$ signifie que G est une primitive de la fonction g .

EXERCICE 1

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x + \beta$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$, $f(a) \geq 0$ et $f(b) \geq 0$.

Montrer que $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ en considérant l'intégrale comme une aire.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 3$.

1. Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un repère orthonormé et étudier la position relative des deux courbes.
2. Calculer l'aire de la partie fermée du plan limitée par ces deux courbes.

EXERCICE 3

Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(5x) + \sin(2x)]dx, & I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [1 + \tan^2(x)]dx, & I_3 &= \int_1^2 (x-1)(x-2)dx, \\ I_4 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & I_5 &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx, & I_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4(x) \sin(x)dx, \\ I_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp[2 \tan(x)] \frac{1}{\cos^2(x)}dx, & I_8 &= \int_0^1 \frac{x+1}{\exp(x)}dx, \text{ et } I_9 = \int_1^2 \ln(x)dx. \end{aligned}$$

EXERCICE 4

Pour les fonctions suivantes préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies puis les calculer :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx, & f_2(x) &= \int [x^2 + \exp(-2x+1)]dx, & f_3(x) &= \int x^2 \sin(2x)dx, \\ f_4 &= \int \arcsin(x)dx, & f_5(x) &= \int x \cos(x^2)dx, \text{ et } f_6 = \int \tan(x)dx. \end{aligned}$$

EXERCICE 5

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, puis la calculer en utilisant le changement de variable indiqué, où k désigne une constante réelle non-nulle : $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + k^2}dx$; on posera $x = kt$.

EXERCICE 6

Pour la fonction suivante préciser l'intervalle sur lequel elle est définie puis la calculer en utilisant le changement de variable indiqué : $f(x) = \int \sin(\sqrt{x})dx$; on posera $x = t^2$.

EXERCICE 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx & \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx & \text{c) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & \text{d) } \int_{\sinh(1)}^{\sinh(2)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ \text{e) } \int_0^2 |1-x|dx & \quad \text{f) } \int_0^1 (2x+1)e^x dx & \text{g) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx \end{aligned}$$

EXERCICE 8

Effectuer deux intégrations par parties pour calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^1 (x+1)^2 e^{-x} dx$ b) $\int_a^b e^x \cos x dx$ c) $\int_{-\pi}^0 x^2 \sin 2x dx$.

EXERCICE 9

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \sin^2 x dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeurs de I et de J .

EXERCICE 10

Calculer les primitives suivantes et préciser sur quel intervalle elles sont définies :

a) $\int x \sqrt{1+x^2} dx$ b) $\int e^{\sin^2(x)} \sin(x) \cos(x) dx$ c) $\int \cos^3(x) dx$
d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ e) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ f) $\int \sin x \cos^3 x dx$
g) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ h) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}} dx$ i) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

EXERCICE 11

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$:

1. Par un changement de variable.
2. Sans calcul, en interprétant l'aire géométriquement.

EXERCICE 12

Soit n un entier naturel. Calculer l'intégrale : $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ (Indication : si n est plus grand que 2, intégrer par parties afin d'obtenir la relation de récurrence $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$).

EXERCICE 13

Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1-y(t))$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E) ?
2. Trouver deux constantes A et B telles que $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}$.
3. En déduire une primitive de $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).
4. Résoudre l'équation différentielle (E).

EXERCICE 14

On considère la fonction réelle suivante : $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-5)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Décomposer f , qu'on appelle fraction rationnelle, en une somme de deux fractions.
3. En déduire toutes les primitives de f .