Université de Provence
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

Intoduction à l'analyse

Planche 4

Exercice 1

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = \frac{t}{y^3(t)}.$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle suivante :
$y'(t) = -2ty^2(t)$ avec $y(0) = 1$, puis $y(0) = -1$, et finalement $y(0) = 0$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'(t) + 5y(t) = 0,$$

$$2y'(t) - 3y(t) = 0,$$

$$(1 + t^2)y'(t) + 4ty(t) = 0.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) $y'(t) - 2ty(t) = t$
et l'équation sans second membre associée (e) $y'(t) - 2ty(t) = 0$.
a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E) ?
b) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la méthode de la variation de la constante.
c) Résoudre (e), puis en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) $y'(t) + y(t) = \cos(t)$, et l'équation sans second membre associée (e) $y'(t) + y(t) = 0$.
a) Trouver une solution de (E) sous la forme $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.
b) Résoudre (e).
c) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6

L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une self d'inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la $f.é.m$ appliquée aux extrémités.
Résoudre l'équation différentielle
a) quand $E(t) = E_0$ constante ; b) quand $E(t) = E_0 \sin(wt)$.

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'(t) + 2ty(x) = \exp(t - t^2),$$

$$y'(t) + \frac{t}{t^2+1}y(t) - \frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = 0.$$

EXERCICE 8

On considère l'équation

$$(E) \quad y'(t) + \frac{3t}{t^2+1} y(t) = \frac{t}{t^2+1}.$$

1. Déterminer l'intervalle de résolution de (E).
2. Résoudre (E).
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale

$$y(0) = 2.$$

Équations différentielles d'ordre deux.

EXERCICE 9

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(t) - y(t) = e^{2t}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{2t}$ où A est une constante.

EXERCICE 10

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

b) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = te^{4t}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(t) = e^{4t}(At + B)$ où A, B sont des constantes.

EXERCICE 11

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) + 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$.

b) $y''(t) + 4y(t) = 0$ sachant que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$.

c) $y''(t) + 4y(t) = \cos(2t)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(t) = At\sin(2t)$ où A est une constante.

EXERCICE 12

Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme $y(t) = P(t)$, où $P(t)$ est un polynôme.

a) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2t^2 - 8t + 5$, où $P(t)$ est du deuxième degré.

b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2$, où $P(t)$ est du deuxième degré.

EXERCICE 13

Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + y'(t) = 1 + t^2$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

EXERCICE 14

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} y''(t) + y'(t) + y(t) &= 2t + 1 \\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= 10\sin(t) \\ y''(t) + 4y(t) &= \cos(2t). \end{aligned}$$

Exercice 15

On considère l'équation

$$(E) \quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t\exp(2t).$$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 4.$$

Exercice 16

On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) + w^2 y(t) = 0 \qquad (E)$$

où w est une constante.

Déterminer w afin qu'il existe une solution f à (E), non identiquement nulle, et telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

Exercices supplémentaires.

Exercice 17

On considère l'équation différentielle :

$$ty'(t) + (t-1)y(t) = e^{-t}$$

1. Chercher une solution particulière de la forme $y(t) = ae^{-t}$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 18

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(t) + y(t)\tan(t) = \sin(2t)$; b) $2ty'(t) + y(t) = t^3$
c) $(1+t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0$; d) $t(t-1)y'(t) - (2t-1)y(t) + t^2 = 0$;

Exercice 19

Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E) ?

b) Trouver deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$.

c) En déduire une primitive de $\dfrac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

d) Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 20

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} y''(t) + 3y(t) &= 0 \\ 3y''(t) + 2y'(t) - y(t) &= 0 \\ 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 21

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = te^t \qquad (E)$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $(at + b)e^t$.
3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$.

Exercice 22

Trouver toutes les solutions de :

a) $y''(t) - y(t) = 0$,
b) $2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 0$,
c) $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$,
d) $y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$.

Exercice 23

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$,
b) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$,
c) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.