Corrigé du sujet d'examen (16 mai 2014)

Exercice 1. *Equations différentielles*

1. *(sur 1,5 point) Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(x) + 2y(x) = 3\exp(x).$$

Réponse : La solution particulière est évidemment $\exp(x)$*, et la solution générale est* $\boxed{y(x) = \exp(x) + C\exp(-2x)}$*,* C *constante.*

2. *(sur 2 points) Résoudre sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *l'équation différentielle*

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \cos(x)x^2.$$

Réponse : Par la méthode de Lagrange (variation de la constante), $\boxed{y(x) = \dfrac{x^3}{3}\cos(x) + C\cos(x)}$*,* C *constante.*

3. *(sur 2 points) Résoudre l'équation différentielle*

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = x^2 - 1.$$

Réponse : On cherche la solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré. La solution générale est $\boxed{y(x) = -x^2 + 2x - 5 + A\exp(x) + B\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)}$*,* A, B *constantes.*

Exercice 2. *Systèmes linéaires*

1. *(sur 1,5 point) Résoudre le système linéaire d'inconnues réelles* x, y *et* z *en utilisant la méthode du pivot de Gauss*

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ x - 3y + z &= 1. \end{cases}$$

Réponse : $x = 0$*,* $y = 0$*,* $z = 1$*.*

2. *On considère le système linéaire d'inconnues réelles* x, y, z *et* t

$$\begin{cases} x + 3y + 3z - t &= 0 \\ -2x + y - z + 2t &= 0 \\ 3x + 5y - 3z + 5t &= 0. \end{cases}$$

(a) *(sur 1,5 point) Résoudre ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss.*
Réponse : $x = \dfrac{t}{4}$, $y = -\dfrac{5t}{8}$, $z = \dfrac{7t}{8}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) *(sur 1 point) Déterminer une base de l'ensemble des solutions.*
Réponse : $(2, -5, 7)$.

Exercice 3. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(sur 2 points) Démontrer que* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   Réponse : C'est parce qu'il y a trois vecteurs et que leur déterminant n'est pas nul (il vaut -42*).*

2. *(sur 1 point) Est-ce que cette base est orthogonale ?*
   Réponse : Oui, le produit de chacun de ces vecteurs par chacun des deux autres est nul.

3. *(sur 1 point) Est-ce que cette base est orthonormée ?*

Réponse : Non, ils sont bien orthogonaux mais leur norme ne vaut pas 1.

Exercice 4. *(sur 2 points) Démontrer que les droites* (D) *et* (D') *d'équations paramétriques respectives*

$$(D) \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+3s \\ y & = & 2s \\ z & = & 1-s \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (D') \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1 \\ z & = & 1+3t \end{array} \right.$$

sont orthogonales.
Réponse : C'est parce les vecteurs directeurs $(3, 2, -1)$ *et* $(1, 0, 3)$ *sont orthogonaux.*

Exercice 5. *On considère la courbe définie par la représentation paramétrique en cartésien*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^3(t) \end{array} \right.$$

1. *(sur 0,5 point) Déterminer l'ensemble de définition.*
   Réponse : $\mathbb{R}$.

2. *(sur 1 point) Démontrer que l'on peut étudier cette courbe sur* $[0, \pi]$.
   Réponse : Les fonctions sont périodiques, $x(t)$ *est paire et* $y(t)$ *impaire.*

3. *(sur 1,5 point) Déterminer le tableau des variations.*
   Réponse :

t	0		π/2		π
x'(t)		-		-	
x(t)	1	↘	0	↘	−1
y'(t)		+		-	
y(t)	0	↗	1	↘	0

4. *(sur 1,5 point) Déterminer les tangentes pour les points qui apparaissent dans le tableau des variations.*
   Réponse : La tangente est horizontale en $t = 0$ *et en* $t = \pi$ *car* $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ *est nul. La tangente est verticale en* $t = \dfrac{\pi}{2}$ *car* $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ *est infini.*

5. *(sur 1 point) Tracer la courbe.*
   Réponse :