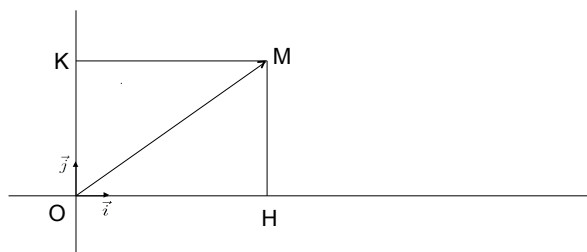


## Mathématiques pour PC 2

### 1 Géométrie et théorie des groupes

#### 1.1 Géométrie dans le plan

Sur ce dessin les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux et ont pour longueur 1. On associe à tout couple de réels  $(x, y)$  le point  $M = M(x, y)$  d'abscisse  $x$  ( $=$  longueur de  $OH$ ) et d'ordonnée  $y$  ( $=$  longueur de  $OK$ ), ainsi que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  (ou tout vecteur parallèle à  $\overrightarrow{OM}$ , de même sens et de même longueur) :



On dit que  $x$  et  $y$  sont les coordonnées de  $M$  ou du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , et que le nombre complexe  $z = x + iy$  est leur affixe. Quand on utilise les affixes, les vecteurs de base sont parfois notés  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  au lieu de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  pour ne pas confondre le vecteur  $\vec{i}$  avec le nombre complexe  $i$ .

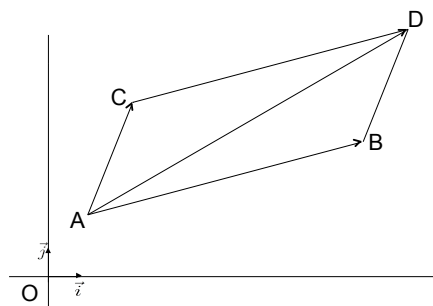
D'après le théorème de Pythagore la longueur d'un vecteur  $\vec{V}$  de coordonnées  $x$  et  $y$  (appelée *norme de  $\vec{V}$* ) est

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La longueur d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  peut être notée  $AB$  au lieu de  $\|\overrightarrow{AB}\|$ .

a) Somme de deux vecteurs.

La *somme de deux vecteurs*  $\vec{V}(x, y)$  et  $\vec{V}'(x', y')$  est par définition le vecteur  $\vec{W}(x + x', y + y')$ . Pour tout parallélogramme  $ABDC$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{V}'$ , le vecteur  $\vec{W}$  est égal à  $\overrightarrow{AD}$  :

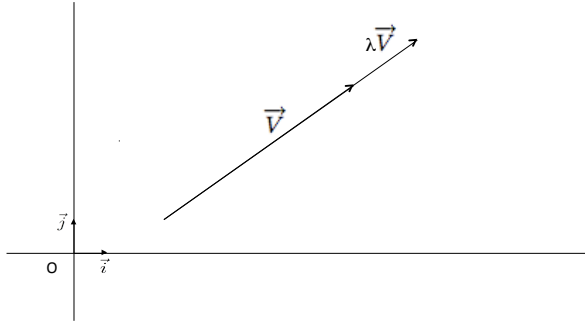


On définit aussi l'addition dans l'ensemble des couples de réels, c'est à dire dans  $\mathbb{R}^2$ , en posant

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

b) Produit d'un vecteur par un réel.

Étant donné un vecteur  $\vec{V}(x, y)$  et un réel  $\lambda$  on notera  $\lambda\vec{V}$  le vecteur de coordonnées  $\lambda x$  et  $\lambda y$ . Il a même direction que  $\vec{V}$  et, si  $\lambda > 0$ , il a même sens que  $\vec{V}$ .



On définit de même le produit d'un réel  $\lambda$  par un couple de réels  $(x, y)$  en posant

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

c) Produit scalaire de deux vecteurs.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{V}(x, y)$  et  $\vec{V}'(x', y')$ , noté  $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ , est un nombre réel défini par

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = xx' + yy'.$$

En particulier  $\vec{V} \cdot \vec{V}$  est égal à  $x^2 + y^2$  c'est à dire à  $\|\vec{V}\|^2$ .

Les propriétés suivantes sont souvent utilisées implicitement dans les calculs :

**Théorème 1.1** *Le produit scalaire est symétrique c'est à dire, pour tous vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$ ,*

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \vec{V}' \cdot \vec{V}.$$

*Il est linéaire par rapport aux deux variables : pour tous vecteurs  $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$  et pour tout réel  $\lambda$ ,*

$$\begin{aligned} (\vec{V} + \vec{V}') \cdot \vec{V}'' &= \vec{V} \cdot \vec{V}'' + \vec{V}' \cdot \vec{V}'' \\ (\lambda \vec{V}) \cdot \vec{V}' &= \lambda (\vec{V} \cdot \vec{V}') \\ \vec{V} \cdot (\vec{V}' + \vec{V}'') &= \vec{V} \cdot \vec{V}' + \vec{V} \cdot \vec{V}'' \\ \vec{V} \cdot (\lambda \vec{V}') &= \lambda (\vec{V} \cdot \vec{V}'). \end{aligned}$$

Autres propriétés du produit scalaire et de la norme :

**Théorème 1.2**

$$|\vec{V} \cdot \vec{V}'| \leq \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz})$$

$$\|\vec{V} + \vec{V}'\| \leq \|\vec{V}\| + \|\vec{V}'\| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\|\lambda \vec{V}\| = |\lambda| \|\vec{V}\|.$$

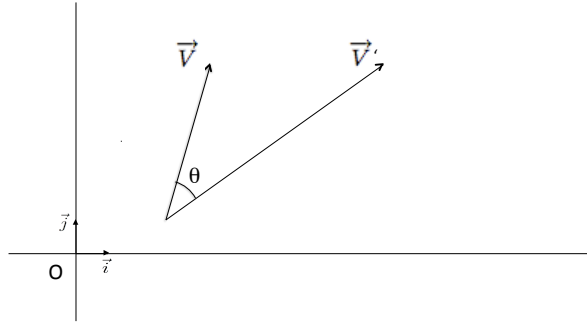
On a également les propriétés géométriques suivantes :

**Théorème 1.3** Soit  $\theta \in [0; \pi]$  l'angle non orienté entre deux vecteurs non nuls  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$ , alors

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{V}'\| \cos \theta$$

$$|\vec{V} \cdot \vec{V}'| = \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow \vec{V} \text{ et } \vec{V}' \text{ colinéaires}$$

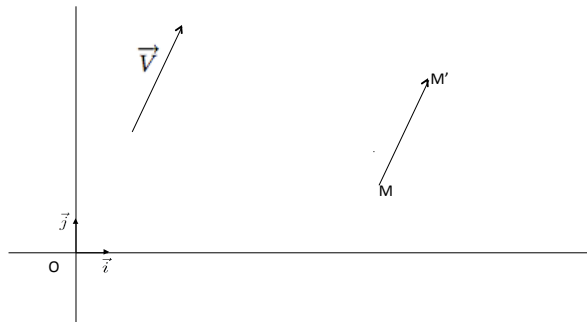
$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{V} \perp \vec{V}'.$$



d) Transformations du plan.

Une transformation du plan est une correspondance qui associe, à tout point  $M$  du plan, un point  $M'$ .

**Translations** : La translation de vecteur  $\vec{V}$  associe à tout point  $M$  le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$  :



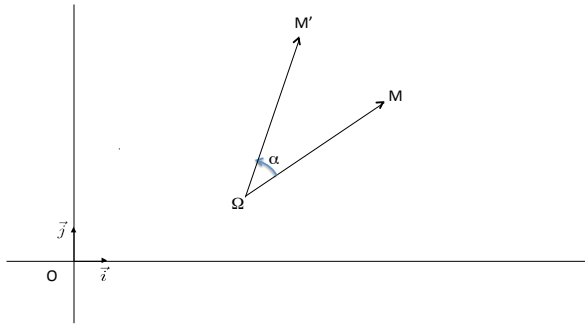
Si  $\vec{V}$  a pour coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  et si  $M$  a pour coordonnées  $x$  et  $y$ , alors les coordonnées de  $M'$  sont  $x' = x + x_0$  et  $y' = y + y_0$ . On dit alors que l'expression analytique de la translation de vecteur  $\vec{V}(x_0, y_0)$ , c'est à dire la formule qui donne les coordonnées de  $M'$  en fonction de celles de  $M$ , est

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

En utilisant les affixes ( $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$ ) cette formule équivaut à

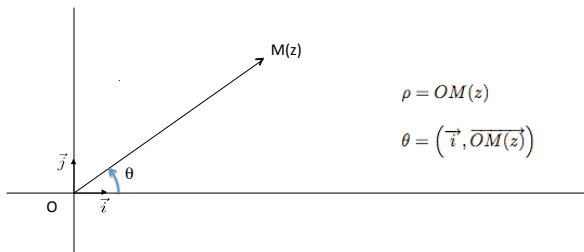
$$z' = z + z_0.$$

**Rotations** : La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  associe à tout point  $M$  le point  $M'$  tel que  $\Omega M = \Omega M'$  et  $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$ .



Avant de donner l'expression analytique de la rotation, rappelons d'abord quelques définitions et formules sur les nombres complexes.

*Rappel :* Tout nombre complexe  $z = x + iy$  peut s'écrire sous la forme  $z = \rho e^{i\theta}$ , où  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $e^{i\theta}$  est par définition le nombre complexe  $\cos \theta + i \sin \theta$ . La représentation géométrique de cette écriture est :



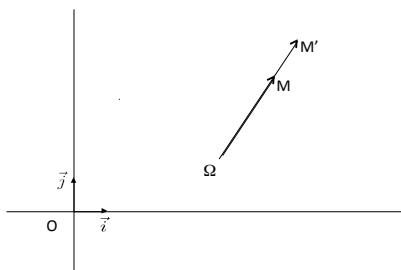
*Expression analytique de la rotation :* Revenons au schéma précédent et donnons un nom aux affixes des trois points :  $\Omega(z_0)$ ,  $M(z)$  et  $M'(z')$ . On appellera  $\theta$ , non pas l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ , mais l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M})$ .

L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{\Omega M}$  (c'est à dire  $z - z_0$ ) est donc égal à  $\rho e^{i\theta}$ . De même l'affixe de  $\overrightarrow{\Omega M'}$  est  $z' - z_0 = \rho e^{i(\theta+\alpha)} = \rho e^{i\theta} e^{i\alpha} = e^{i\alpha}(z - z_0)$ . De cette dernière relation on tire l'expression analytique de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  : on a  $z' = e^{i\alpha}(z - z_0) + z_0$  c'est à dire

$$z' = e^{i\alpha}z + (1 - e^{i\alpha})z_0.$$

On remarquera que c'est un polynôme du premier degré, c'est à dire une fonction de la forme  $az + b$  où  $z$  est la variable (complexe) et  $a$  et  $b$  des constantes (complexes).

**Homothéties :** L'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $r$  (où  $r$  est un réel non nul) associe à tout point  $M$  le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{\Omega M'} = r \overrightarrow{\Omega M}$ .



Cette relation vectorielle équivaut à  $z' - z_0 = r(z - z_0)$  c'est à dire

$$z' = rz + (1 - r)z_0.$$

**Similitudes directes :** Une *similitude directe* est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre. En utilisant les expressions analytiques de la rotation d'angle  $\alpha$  et de l'homothétie de rapport  $r$ , l'affixe  $z$  du point  $M$  et l'affixe  $z'$  de son transformé  $M'$  (par la similitude) sont liés par la relation  $z' - z_0 = re^{i\alpha}(z - z_0)$  c'est à dire

$$z' = re^{i\alpha}z + (1 - re^{i\alpha})z_0.$$

Cette relation est encore de la forme  $z' = az + b$ . Réciproquement, soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes et soit  $T$  la transformation dont l'expression analytique est  $z' = az + b$ , cette transformation est-elle une similitude ? Oui si  $a$  n'est ni 0 ni 1 : on peut mettre le nombre complexe  $a$  sous la forme  $re^{i\alpha}$  avec  $r \in \mathbb{R}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  et considérer le point  $\Omega$  d'affixe  $z_0 = \frac{b}{1 - re^{i\alpha}}$  ; on a alors  $z' = az + b = re^{i\alpha}z + (1 - re^{i\alpha})z_0$ , ce qui prouve que  $T$  est la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $\alpha$  et de rapport  $r$ .

Il reste à préciser quelle est la relation  $T$  si  $a = 0$  ou 1. Dans le cas  $a = 0$  cette transformation n'est pas intéressante :  $M'$  est le point d'affixe  $b$ , il ne dépend pas de  $z$  c'est à dire tous les points  $M(z)$  du plan sont transformés en un seul point  $M'(b)$ . Dans le cas  $a = 1$  on a  $z' = z + b$  donc  $T$  est la translation de vecteur  $\vec{V}(b)$ .

Dans la pratique, quand on veut déterminer le centre d'une similitude directe d'expression analytique  $z' = az + b$ , on détermine son centre  $\Omega(z_0)$  en résolvant l'équation  $z_0 = az_0 + b$  ce qui donne  $z_0 = \frac{b}{1 - a}$ .

La similitude directe d'expression analytique  $z' = az + b$  est appelée *isométrie directe* si  $|a| = 1$ .

### Propriétés des rotations et des similitudes directes

Il est intuitivement clair qu'une rotation conserve les longueurs : soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques et soient  $A'$  et  $B'$  leurs transformés respectifs par une rotation  $R$ , alors  $A'B' = AB$ .

De même elle conserve les angles : si  $A, B, C$  sont trois points quelconques et  $A', B', C'$  leurs transformés par  $R$ , alors  $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$ .

Il est moins immédiat de trouver toutes les transformations qui conservent les longueurs et les angles. Nous allons démontrer (en partie) le théorème suivant :

**Théorème 1.4** Soit  $T$  une transformation du plan.

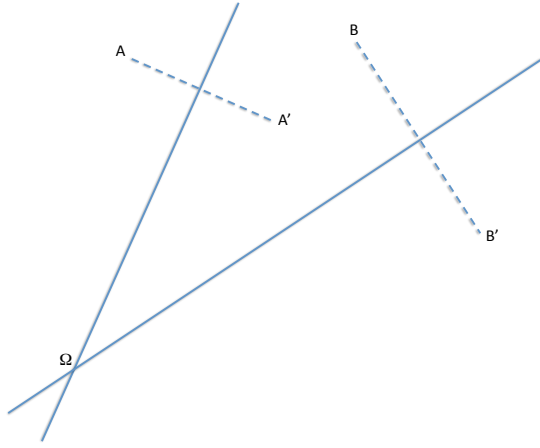
- (i) Si  $T$  conserve les longueurs et les angles alors c'est une rotation ou une translation.
- (ii) Si  $T$  conserve les angles et multiplie la longueur de tout segment par une même constante  $k > 0$ , c'est une similitude directe.

Démonstration : Soit  $T$  une transformation qui conserve les longueurs et les angles ; ceci équivaut à faire l'hypothèse suivante :

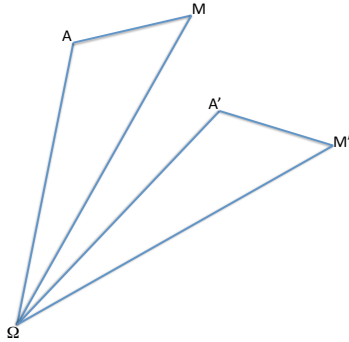
( $\mathcal{H}$ ) :  $T$  transforme tout triangle  $ABC$  en un triangle  $A'B'C'$  égal (sous entendu : en conservant ses angles orientés).

Choisissons deux points fixés  $A$  et  $B$  dans le plan, et appelons  $A'$  et  $B'$  leurs transformés par  $T$ .

Si la médiatrice du segment  $[AA']$  coupe la médiatrice du segment  $[BB']$  en un point  $\Omega$ , alors les triangles  $\Omega AB$  et  $\Omega A'B'$  sont égaux ( $\Omega A = \Omega A'$  et  $\Omega B = \Omega B'$  parce que  $\Omega$  est sur les deux médiatrices, et  $AB = A'B'$  parce que  $T$  conserve les longueurs). On déduit alors de l'hypothèse ( $\mathcal{H}$ ) que le transformé de  $\Omega$  est  $\Omega$  lui-même.



Considérons maintenant un point quelconque  $M$ , et  $M'$  son transformé par  $T$ .



Comme  $T$  transforme le triangle  $\Omega A M$  en un triangle  $\Omega A' M'$  égal, on a  $\Omega M = \Omega M'$  et

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) &= (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) + (\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega M'}) \\ &= (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) \\ &= (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}), \end{aligned}$$

autrement dit  $M'$  est aussi le transformé de  $M$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'})$ . Quand le point  $M$  varie dans le plan,  $\Omega$  et  $\alpha$  restent les mêmes puisqu'ils ne dépendent que de  $A$  et  $B$  qu'on a supposé fixés.  $T$  est donc la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$ .

Reste à dire ce qu'est la transformation  $T$  dans le cas où les médiatrices de  $[AA']$  et de  $[BB']$  ne se coupent pas, c'est à dire quand elles sont parallèles : une démonstration analogue prouve que  $T$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AA'}$ .

On démontre de même la partie (ii) du théorème. ■

## 1.2 Structure de groupe

a) Définition.

Donnons d'abord un exemple : quand on dit que  $\mathbb{R}$  est un groupe pour l'addition ça signifie que l'addition est une loi de composition interne (c'est à dire l'addition de deux nombres réels est un nombre réel), que l'addition est associative  $((x + y) + z = x + (y + z))$ , qu'elle admet un élément neutre  $(x + 0 = 0 + x = x)$

et que tout élément de  $\mathbb{R}$  admet un symétrique par rapport à l'élément neutre ( $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ).

Un autre exemple : quand on dit que  $\mathbb{R}^*$  (ensemble des réels non nuls) est un groupe pour la multiplication ça signifie que la multiplication est une loi de composition interne (c'est à dire la multiplication de deux réels non nuls est un réel non nul), que la multiplication est associative ( $(xy)z = x(yz)$ ), qu'elle admet un élément neutre ( $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ) et que tout réel non nul admet un symétrique (réel non nul aussi) par rapport à l'élément neutre ( $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ ).

La définition générale est la suivante :

**Définition 1.5** *Un ensemble  $G$  est un groupe pour une loi de composition  $*$  si*

- (i) *cette loi est interne c'est à dire  $x * y$  appartient à  $G$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $G$  ;*
- (ii) *elle est associative c'est à dire  $(x * y) * z = x * (y * z)$  pour tout  $x, y, z$  dans  $G$  ;*
- (iii) *elle admet un élément neutre c'est à dire il existe un élément  $e$  de  $G$  tel que*

$$x * e = e * x = x \quad \text{pour tout } x \in E;$$

- (iv) *tout élément  $x \in G$  admet un symétrique pour la loi  $*$  c'est à dire il existe un élément  $x'$  de  $G$  tel que*

$$x * x' = x' * x = e.$$

Quelques contre-exemples :

Le produit scalaire n'est pas une loi interne, parce que le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre.

L'addition est une loi interne sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers positifs ou nuls parce que  $x + y$  appartient à  $\mathbb{N}$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{N}$ ; cependant  $\mathbb{N}$  n'est pas un groupe pour l'addition : le symétrique (pour l'addition) d'un élément  $n \in \mathbb{N}$  est  $-n$ , qui n'appartient pas à  $\mathbb{N}$  si  $n > 0$ .

D'autre part un groupe  $E$  est dit *commutatif* ou *abélien* si  $x * y = y * x$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

b) Autre exemple et définitions.

Il y a bien sûr d'autres lois de composition interne que l'addition et la multiplication, par exemple la composition des applications. Soit  $E$  un ensemble, on notera  $\mathcal{F}(E)$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $E$ . Étant donnés  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  dans  $E$ , on note  $f \circ g$  et on appelle *composée de  $f$  et de  $g$*  l'application définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La loi  $\circ$  est alors une loi de composition interne dans l'ensemble  $\mathcal{F}(E)$  puisque  $f \circ g$  est une application de  $E$  dans  $E$ . Vérifions qu'elle est associative :  $(f \circ g) \circ h$  est égal à  $f \circ (g \circ h)$  parce que, pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f(g \circ h(x)) \\ &= f \circ (g \circ h)(x). \end{aligned}$$

L'élément neutre de la loi  $\circ$  est l'identité sur  $E$ , c'est à dire c'est l'application  $Id_E : E \rightarrow E$  définie par  $Id_E(x) = x$  pour tout  $x \in E$ , puisque cette application vérifie évidemment  $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$  (pour tout  $f \in \mathcal{F}(E)$ ).

Quant à l'élément symétrique de  $f$  (pour la loi  $\circ$ ), s'il existe c'est un élément  $g \in \mathcal{F}(E)$  tel que  $f \circ g = g \circ f = Id_E$  c'est à dire  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  pour tout  $x \in E$ . On sait que ceci équivaut à dire que  $f$  est bijective et que son application réciproque est  $g$ . Donc seules les bijections auront un élément symétrique pour la loi  $\circ$ , et on a le théorème suivant :

**Théorème 1.6** *L'ensemble des bijections de  $E$  sur  $E$ , noté  $\mathfrak{S}(E)$ , est un groupe pour la composition des applications. On l'appelle "groupe symétrique de  $E$ ".*

En général ce groupe n'est pas commutatif : par exemple les fonctions  $f(x) = x + 1$  et  $g(x) = 2x$ , qui sont des bijections de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , vérifient  $f \circ g \neq g \circ f$  puisque

$$f \circ g(x) = f(2x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(x + 1) = 2x + 2.$$

Quand l'ensemble  $E$  est fini, les bijections de  $E$  dans  $E$  s'appellent *permutations* de  $E$ .

Encore quelques définitions :

**Définition 1.7** *Étant donné un groupe  $G$  pour la loi de composition  $*$ , on dira qu'un sous-ensemble  $H$  de  $G$  est un sous-groupe si  $H$  est un groupe pour la loi  $*$ .*

Pour vérifier (sur des exemples) ces conditions, il est inutile de démontrer l'associativité (c'est à dire  $(x * y) * z = x * (y * z)$  pour tout  $x, y, z$  dans  $H$ ) puisque les éléments de  $H$  sont des éléments du groupe  $G$  et vérifient donc cette condition. Par contre il faut vérifier que la loi  $*$  est une loi de composition interne dans  $H$ , que l'élément neutre de  $G$  appartient à  $H$ , et que l'élément symétrique de tout élément de  $H$  (qui existe dans  $G$ ) appartient à  $H$ .

Par exemple il est clair que  $(\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  : la somme de deux entiers est un entier, l'élément neutre 0 est un entier, et l'élément symétrique de tout entier  $x$  est l'entier  $-x$ .

**Définition 1.8** *Étant donné un groupe  $G_1$  (pour une loi notée  $*$ ) et un groupe  $G_2$  (pour une loi notée  $\star$ ), on dira que l'application  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  est un homomorphisme de groupes lorsqu'on a, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $G_1$ ,*

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \star \varphi(y).$$

Un exemple classique est la fonction exponentielle : c'est un homomorphisme de  $\mathbb{R}$  (groupe pour l'addition) dans  $\mathbb{R}^*$  (groupe pour la multiplication) puisque c'est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^*$  et qu'elle vérifie

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

On appelle *noyau* d'un homomorphisme  $\varphi$  l'ensemble des  $x \in G_1$  tels que  $\varphi(x) = 0$ . On appelle *image* de  $\varphi$  l'ensemble des  $\varphi(x)$  pour  $x \in G_1$ . Par exemple si l'application  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  est définie par  $\varphi(n) = 2n$ , l'image de  $\varphi$  est l'ensemble des entiers pairs.

Notations utilisées :  $\text{Ker } \varphi$  pour le noyau, et  $\text{Im } \varphi$  ou  $\varphi(G_1)$  pour l'image.

Un *isomorphisme* est un homomorphisme bijectif.

Le *produit cartésien* de deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , noté  $E_1 \times E_2$ , est l'ensemble des couples  $(x_1, x_2)$ , où  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ . Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des groupes pour les lois  $*$  et  $\star$  respectivement, leur produit cartésien est un groupe (pour la loi correspondante sur l'ensemble des couples) appelé produit direct des groupes  $E_1$  et  $E_2$ . Par exemple  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  est un groupe pour l'addition des couples de réels.

c) Action d'un groupe sur un ensemble.

L'exemple le plus simple est l'action du groupe  $\mathbb{R}^2$  sur le plan affine (c'est à dire sur l'ensemble des points du plan). On décide d'associer à tout couple  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , la translation de vecteur  $\vec{V}(x_0, y_0)$ ; cette translation agit sur le plan affine en ce sens qu'elle translate ses points  $M(x, y)$  en  $M'(x + x_0, y + y_0)$ . Donc en associant à tout couple de réels une translation, on a défini une action du groupe  $\mathbb{R}^2$  sur le plan affine. Pour que la définition soit correcte, il faut remarquer que la translation associée à une somme  $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$  est la composée de la translation associée à  $(x_0, y_0)$  par celle associée à  $(x_1, y_1)$ .

Pour avoir une idée de la définition générale, voir le site

[http://fr.wikipedia.org/Action\\_de\\_groupe](http://fr.wikipedia.org/Action_de_groupe)

Pour des exemples d'applications,

[http://fr.wikipedia.org/Symétrie\\_\(physique\)](http://fr.wikipedia.org/Symétrie_(physique))

[http://fr.wikipedia.org/Brisure\\_de\\_symétrie](http://fr.wikipedia.org/Brisure_de_symétrie)

[http://fr.wikipedia.org/Brisure\\_spontanée\\_de\\_symétrie](http://fr.wikipedia.org/Brisure_spontanée_de_symétrie)

## 2 Calcul différentiel

### 2.1 Équations différentielles linéaires

a) Équations différentielles linéaires du premier ordre.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une relation de la forme

$$(1) \quad ay' + by = c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions données, et il s'agit de trouver toutes les fonctions  $y$  qui satisfont cette relation. Donnons deux exemples :

- $(x^2 + 1)y' + (5x + 3)y = x^5$  est une équation différentielle ; pour la résoudre il faut connaître la méthode que nous allons exposer, et il faut aussi faire un certain nombre de calculs d'intégrales.

- Un exemple plus simple est l'équation différentielle  $3y' = x^5$  (on a enlevé la principale difficulté en choisissant  $b = 0$ ). Les fonctions  $y$  qui vérifient cette équation vérifient aussi  $y' = \frac{1}{3}x^5$ , autrement dit ces fonctions sont les primitives de  $\frac{x^5}{3}$ . Sachant que  $x^5$  a pour primitive  $\frac{x^6}{6}$ , les solutions de l'équation différentielle  $3y' = x^5$  sont les fonctions  $y(x) = \frac{x^6}{18} + C$  (quelle que soit la valeur de la constante  $C$ ).

Pour résoudre l'équation différentielle (1) dans le cas général, nous considérerons d'abord le cas particulier où la fonction  $c$  est nulle :

**Théorème 2.1** (équation différentielle sans second membre) Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions. Les solutions de l'équation différentielle

$$ay' + by = 0$$

sont les fonctions  $y(x) = Ce^{F(x)}$ , où  $C$  est une constante réelle et  $F$  est une primitive de la fonction  $f = -\frac{b}{a}$  (la variable  $x$  appartient à un intervalle où les fonctions  $a$  et  $b$  sont définies, et où la fonction  $a$  ne s'annule pas).

**Remarque 2.2** Quel est le sens de cette précision sur la variable  $x$  : si par exemple la fonction  $a$  vaut  $a(x) = x$ , alors la fonction  $f = -\frac{b}{a}$  n'est pas définie en  $x = 0$ . Elle est définie sur les deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ , et par conséquent il y a possibilité de prendre deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  : on aura  $y(x) = C_1 e^{F(x)}$  pour tout  $x \in ] -\infty, 0[$  et  $y(x) = C_2 e^{F(x)}$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

Résolution (un peu plus compliquée) du cas général :

**Théorème 2.3** (méthode de variations de la constante) Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions. Les solutions de l'équation différentielle

$$ay' + by = c$$

sont de la forme  $y(x) = G(x)e^{F(x)} + Ce^{F(x)}$ , où  $C$  est une constante réelle,  $F$  est une des primitives de la fonction  $f = -\frac{b}{a}$ , et  $G$  une des primitives de la fonction  $g = \frac{c}{a \cdot e^F}$  (la variable  $x$  appartient à un intervalle où les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies, et où la fonction  $a$  ne s'annule pas).

Démonstration du premier théorème : Soit  $y$  une solution de l'équation différentielle  $ay' + by = 0$ . Il s'agit de démontrer qu'il existe une constante  $C$  telle que  $y(x) = Ce^{F(x)}$  ; ça revient à démontrer que la fonction  $\frac{y(x)}{e^{F(x)}}$  est égale à une constante  $C$ . On sait qu'une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. Donc pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que la dérivée de la fonction  $\frac{y(x)}{e^{F(x)}} = y(x)e^{-F(x)}$  est nulle. Cette dérivée vaut

$$\begin{aligned} y'(x)e^{-F(x)} - y(x)F'(x)e^{-F(x)} &= y'(x)e^{-F(x)} - y(x)f(x)e^{-F(x)} \\ &= e^{-F(x)}(y'(x) - y(x)f(x)) \\ &= e^{-F(x)}\left(y'(x) + y(x)\frac{b(x)}{a(x)}\right) \\ &= e^{-F(x)}\frac{a(x)y'(x) + y(x)b(x)}{a(x)} \end{aligned}$$

et elle est effectivement nulle puisqu'on a supposé au départ  $ay' + by = 0$ . ■

Démonstration du deuxième théorème : La méthode de variation de la constante consiste à résoudre d'abord l'équation sans second membre  $ay' + by = 0$  : c'est ce qu'on a fait au premier théorème, on a trouvé  $y(x) = Ce^{F(x)}$  avec  $C$  constante et  $F$  primitive de la fonction  $f = -\frac{b}{a}$ . Ensuite on cherche les solutions de l'équation avec second membre sous la forme  $y(x) = C(x)e^{F(x)}$ , où cette fois-ci  $C(x)$  est une fonction. On a

$$\begin{aligned} ay' + by = c &\Leftrightarrow a(x) \left( C'(x)e^{F(x)} + C(x)F'(x)e^{F(x)} \right) + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x) \left( C'(x)e^{F(x)} - C(x)\frac{b(x)}{a(x)}e^{F(x)} \right) + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x)C'(x)e^{F(x)} - C(x)b(x)e^{F(x)} + b(x)C(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow a(x)C'(x)e^{F(x)} = c(x) \\ &\Leftrightarrow C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)e^{F(x)}}. \end{aligned}$$

Ceci équivaut à dire que la fonction  $C$  est une primitive de la fonction  $g = \frac{c}{a \cdot e^F}$ . On choisit une primitive de  $g$ , qu'on appelle  $G$ , et on a alors  $C(x) = G(x) + C$  avec  $C$  constante. D'où  $y(x) = C(x)e^{F(x)} = G(x)e^{F(x)} + Ce^{F(x)}$ . ■

Nous allons voir comment utiliser ces théorèmes sur les deux exemples suivants :

$$(E_1) : xy' + y = x^3 + x^2 + 2x + 1,$$

$$(E_2) : y' + xy = x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

On leur associe les équations sans second membre :

$$(e_1) : xy' + y = 0,$$

$$(e_2) : y' + xy = 0,$$

qu'on résout au moyen du premier théorème. Pour l'équation  $(e_1)$ ,

$$f_1(x) = -\frac{1}{x} \text{ et } F_1(x) = -\ln|x| \text{ donc la solution générale de } (e_1) \text{ est } y(x) = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{e^{\ln|x|}} = \frac{C}{|x|}, \text{ ou plus simplement } y(x) = \frac{C}{x} \text{ (en remplaçant } C \text{ par } -C \text{ pour les } x \text{ négatifs).}$$

Pour l'équation  $(e_2)$ ,

$$f_2(x) = -x \text{ et } F_2(x) = -\frac{x^2}{2} \text{ donc la solution générale de } (e_2) \text{ est } y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Résolvons maintenant l'équation  $(E_1)$  au moyen du second théorème :

$$g_1(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{xe^{-\ln|x|}} = \pm(x^3 + x^2 + 2x + 1) \text{ et } G_1(x) = \pm \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \text{ (suivant le signe de } x). \text{ Par la formule du théorème, la solution générale de } (E_1) \text{ est } y(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} + x + 1 + \frac{C}{x}.$$

Résolvons  $(E_2)$  :

$$g_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = (x^3 + x^2 + 2x + 1)e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ il y a donc un problème pour intégrer cette fonction et on peut dire que la méthode de variation de la constante n'est pas efficace pour résoudre } (E_2). \text{ Une autre méthode consiste à chercher une solution particulière de l'équation } (E_2) \text{ sous la forme d'un polynôme (ce qui est indiqué normalement dans l'énoncé). Ici c'est un polynôme de degré 2 : } y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \text{ On reporte ce polynôme dans l'équation } (E_2), \text{ ce qui fait}$$

$$2\alpha x + \beta + x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^3 + x^2 + 2x + 1 \text{ c'est à dire}$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + (\gamma + 2\alpha)x + \beta = x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

En identifiant les coefficients on en déduit  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma + 2\alpha = 2$  c'est à dire  $\gamma = 0$ . La solution particulière (qu'on appellera  $y_p$ ) est donc  $y_p(x) = x^2 + x$ .

Quelle que soit la solution  $y$  de l'équation  $(E_2)$ , elle vérifie

$$\begin{aligned}(y - y_p)' + x(y - y_p) &= (y' + xy) - (y_p' + xy_p) \\ &= (x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 + x^2 + 2x + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

autrement dit la fonction  $y - y_p$  est solution de  $(e_2)$ . Comme on a calculé toutes les solutions de  $(e_2)$ , on a  $y(x) - y_p(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$  c'est à dire  $y(x) = x^2 + x + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ .

b) Équations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants.

On considérera d'abord les équations différentielles sans second membre, pour lesquelles on va démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.4** Pour résoudre l'équation différentielle

$$(2) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

(où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes réelles avec  $a \neq 0$ ), on calcule d'abord les racines du polynôme  $aX^2 + bX + c$  :

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac > 0), \\ r &= \frac{-b}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac = 0), \\ r_1 &= \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (\text{si } b^2 - 4ac < 0).\end{aligned}$$

Dans ce dernier cas on remarque que  $r_1 = \alpha - i\beta$  et  $r_2 = \alpha + i\beta$  avec

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Les solutions de l'équation différentielle (2) sont alors les fonctions

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad (\text{dans le premier cas}),$$

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx} \quad (\text{dans le second}),$$

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \quad (\text{dans le troisième}),$$

quelles que soient les valeurs des constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$ .

Démonstration partielle : Soit  $r$  un nombre (réel ou complexe) tel que  $ar^2 + br + c = 0$ . Alors la fonction  $y(x) = e^{rx}$  est solution de l'équation (2) puisque

$$\begin{aligned}ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} \\ &= (ar^2 + br + c)e^{rx} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On vérifie de même que, si deux nombres  $r_1$  et  $r_2$  vérifient  $ar_1^2 + br_1 + c = 0$  et  $ar_2^2 + br_2 + c = 0$ , alors les fonctions  $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$  sont solutions de (2) (quelles que soient les valeurs des constantes  $\lambda$  et  $\mu$ ). Dans le cas  $r_1 = r_2$  c'est à dire si le polynôme  $aX^2 + bX + c$  n'a qu'une racine  $r$ , on vérifie aussi que les fonctions  $y(x) = (\lambda x + \mu) e^{rx}$  sont solutions de (2). Dans ces deux cas on démontre qu'il n'y a pas d'autre solution (en se ramenant à des équations différentielles du premier ordre).

Dans la pratique, les coefficients  $a, b, c$  de l'équation sont réels et on s'intéresse aux solutions à valeurs réelles, c'est à dire il faut choisir les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  de façon que la valeur de  $y(x)$  qu'on a trouvée appartienne à  $\mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Si le polynôme  $aX^2 + bX + c$  a deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$  (distinctes ou confondues), alors il suffit de choisir  $\lambda$  et  $\mu$  réels pour que  $y(x)$  le soit aussi. Si ce polynôme a deux racines complexes  $r_1 = \alpha - i\beta$  et  $r_2 = \alpha + i\beta$ , on est obligé de choisir deux constantes complexes  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  et  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$  sinon  $y(x)$  n'aurait aucune chance d'être réel. Faisons le calcul de  $y(x)$  :

$$\begin{aligned}y(x) &= \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2) e^{\alpha x - i\beta x} + (\mu_1 + i\mu_2) e^{\alpha x + i\beta x} \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2) e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) + (\mu_1 + i\mu_2) e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2 + \mu_1 + i\mu_2) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (-i\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 - \mu_2) e^{\alpha x} \sin(\beta x).\end{aligned}$$

Remarquons que cette expression est de la forme  $\gamma \cos(\beta x) + \delta \sin(\beta x)$ . La constante  $\gamma$  vaut  $\lambda_1 + i\lambda_2 + \mu_1 + i\mu_2$  et la constante  $\delta$  vaut  $-i\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 - \mu_2$ ; ces constantes sont réelles si et seulement si  $\lambda_1 = \mu_1$  et  $\lambda_2 = -\mu_2$ . On a alors  $\gamma = 2\lambda_1$  et  $\delta = 2\lambda_2$  et, comme on peut choisir n'importe quelle valeur réelle pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on le peut aussi pour  $\gamma$  et  $\delta$ . Autrement dit la fonction  $y$  est solution de l'équation (2) si et seulement si il existe  $\gamma$  et  $\delta$  réels tels que  $y(x) = e^{\alpha x}(\gamma \cos(\beta x) + \delta \sin(\beta x))$ . ■

Pour terminer expliquons comment résoudre dans certains cas les équations différentielles du second ordre de la forme

$$(3) \quad ay'' + by' + cy = d,$$

où  $d$  est une fonction, et  $a, b, c$  des constantes réelles.

On suppose que la fonction  $d$  est un polynôme, une exponentielle, un cosinus, un sinus, ou une somme de telles fonctions. On cherche une solution particulière de l'équation (3) sous la forme d'une fonction  $y$  qui soit un polynôme ou une exponentielle ou ... c'est à dire qui ait la même forme que la fonction  $d$  (ça marche sauf si la fonction  $d$  est elle-même une solution de l'équation (2)). On appelle  $y_p$  cette solution particulière et  $y$  une solution quelconque de l'équation (3), on a alors

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $y - y_p$  est solution de l'équation différentielle (2), et c'est une des fonctions donnée par le théorème. On en déduit que les fonctions

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad (\text{si } b^2 - 4ac > 0) \\ &= y_p(x) + (\lambda x + \mu)e^{rx} \quad (\text{si } b^2 - 4ac = 0) \\ &= y_p(x) + e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \quad (\text{si } b^2 - 4ac < 0) \end{aligned}$$

sont solutions de (3) quelles que soient les valeurs des constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$ .

## 2.2 Fonctions réelles de deux variables réelles

Le terme "fonction réelle" signifie : fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple la fonction définie par  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  est à valeurs réelles puisque  $\sqrt{x^2 + y^2}$  appartient à  $\mathbb{R}$ , mais c'est une fonction des deux variables réelles  $x$  et  $y$ . Les fonctions réelles de deux variables réelles sont donc des applications  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . Les définitions et théorèmes de ce paragraphe concernent ces fonctions mais se généralisent aux fonctions de  $m$  variables réelles à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , quels que soient les entiers strictement positifs  $m$  et  $n$ . Dans la pratique, les champs vectoriels par exemple sont des fonctions de trois variables réelles, à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ ; les champs scalaires comme la pression sont des fonctions de trois variables réelles, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

a) Notion de limite et de continuité.

Intuitivement quand on dit qu'une fonction  $f(x, y)$  tend vers une limite  $\ell$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(x_0, y_0)$ , cela signifie que :

si  $(x, y)$  est proche de  $(x_0, y_0)$  alors  $f(x, y)$  est proche de  $\ell$ .

Autrement dit :

si  $|x - x_0|$  et  $|y - y_0|$  sont petits alors  $|f(x, y) - \ell|$  est petit.

Ceci se traduit par la définition suivante

**Définition 2.5** Soit  $f$  une fonction réelle de deux variables réelles; on dit qu'elle admet pour limite  $\ell$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(x_0, y_0)$  (en abrégé  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$ ) si

quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $\alpha > 0$  tel que, si  $|x - x_0| \leq \alpha$  et  $|y - y_0| \leq \alpha$ , alors  $|f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon$ .

On peut alors définir la continuité :

**Définition 2.6** Une fonction réelle  $f$  de deux variables réelles est dite continue en  $(x_0, y_0)$  si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Elle est dite continue si elle est continue en tout  $(x_0, y_0)$  de son domaine de définition.

Dans la pratique on sait (et on ne redémontre pas) que les fonctions usuelles d'une seule variable, c'est à dire les polynômes, l'exponentielle, le logarithme, les fonctions puissance, les fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses, sont continues sur leurs domaines de définition.

Les fonctions d'une ou plusieurs variables qui sont composées de fonction réelles (par exemple  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \tan\left(\frac{x}{y}\right)$ ) sont continues sur leurs domaines de définition : c'est une conséquence du théorème suivant (que nous énonçons dans le cas des fonctions de deux variables). Nous ne le démontrons pas, la démonstration étant à peu près la même que pour les fonctions d'une variable.

**Théorème 2.7** (i) Si deux fonctions réelles  $f$  et  $g$  de deux variables réelles sont continues en  $(x_0, y_0)$ , alors  $f + g$ ,  $fg$  et (si  $g(x_0, y_0) \neq 0$ )  $\frac{f}{g}$  sont continues en  $(x_0, y_0)$ .

(ii) Une fonction composée de la forme  $\varphi(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$  (en abrégé :  $f = \varphi(u,v)$ ) est continue en  $(x_0, y_0)$  si  $u$  et  $v$  sont continues en ce point et si  $f$  est continue au point  $(u_0, v_0)$  (image de  $(x_0, y_0)$  par le couple de fonctions  $(u,v)$ ).

(iii) Une fonction composée de la forme  $\psi(x,y) = f(g(x,y))$  (où  $f$  est une fonction réelle d'une variable réelle et  $g$  une fonction réelle de deux variables réelles) est continue en  $(x_0, y_0)$  si  $g$  est continue en ce point et si  $f$  est continue en  $g(x_0, y_0)$ .

Apparemment il n'y a plus de problème, toutes les fonctions qu'on peut avoir à utiliser sont continues sur leurs domaines de définition. Mais nous allons voir sur les exemples suivants que le problème se pose quand on veut prolonger les fonctions en dehors de leurs domaines de définition.

Exemples : • Soit  $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ . Cette fonction n'est pas définie en  $(x,y) = (0,0)$ . Compte tenu que  $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  est nul si une seule des deux variables  $x$  ou  $y$  est nulle, il est naturel de prolonger la fonction  $f$  en posant  $f(0,0) = 0$ , elle est alors définie sur  $\mathbb{R}^2$  mais il faut démontrer qu'elle est continue en  $(0,0)$  parce que pour le moment on sait seulement qu'elle est continue en tout  $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ . Pour cela écrivons la sous forme d'un produit de deux fonctions :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y.$$

La première fonction c'est à dire  $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$  est comprise entre 0 et 1 parce que  $\frac{0}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ . Donc  $f(x,y)$  est compris entre  $-y$  et  $y$  et, compte tenu que  $y$  tend vers 0 quand  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , on a bien  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  c'est à dire  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$  et  $f$  est continue en  $(0,0)$ .

• Soit  $g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Comme la précédente cette fonction est continue en tout  $(x_0, y_0) \neq (0,0)$  mais contrairement à la précédente on ne peut pas la prolonger en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  pour les raisons suivantes :

même si  $x$  et  $y$  sont petits,  $g(x,y)$  ne l'est pas forcément puisque si  $x = y$  on a  $g(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$  ;

et on ne peut pas dire pour autant que la limite de  $g(x,y)$  quand  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  vaut  $\frac{1}{2}$  puisque, si  $x$  est petit (et non nul) et si  $y$  est nul, on a  $g(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$ .

b) Dérivées partielles.

Soit  $f$  une fonction réelle de deux variables réelles  $x$  et  $y$  ; pour obtenir sa dérivée partielle par rapport à  $x$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on fait comme si  $y$  était une constante et on dérive  $f(x,y)$  par rapport à  $x$ . On définit de même la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Remarquons qu'on a utilisé le symbole  $\partial$  au lieu du symbole  $d$  ; on utilise le symbole  $\partial$  chaque fois qu'on a affaire à une fonction de plusieurs variables.

D'autre part on appelle *gradient de  $f$*  le vecteur  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ .

Par exemple la fonction  $f(x, y) = x^2y^3 + x^3$  a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2 \text{ (puisque'on a considéré } y^3 \text{ comme une constante),}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \text{ (parce que cette fois on a considéré } x^2 \text{ et } x^3 \text{ comme des constantes, et la dérivée de la constante } x^3 \text{ est nulle).}$$

c) Différentielle.

La notion de différentielle, d'une fonction de deux variables par exemple, est un peu plus compliquée que celle de dérivée ou de dérivée partielle.

Prenons d'abord comme exemple la fonction  $f(x, y) = x^2y^3 + x^3$ , dont les dérivées partielles sont  $2xy^3 + 3x^2$  et  $3x^2y^2$ . Au point  $(x, y) = (1, 2)$  par exemple ces dérivées partielles valent  $2 \cdot 2^3 + 3 = 19$  et  $3 \cdot 2^2 = 12$ . On appelle différentielle de  $f$  au point  $(1, 2)$  la fonction de deux variables réelles  $\varphi(h, k) = 19h + 12k$ . Cette fonction est notée habituellement  $df(1, 2)$ , on a donc  $df(1, 2)(h, k) = 19h + 12k$ .

Autre exemple, la fonction d'une seule variable  $g(x) = x^2$  a pour dérivée  $g'(x) = 2x$  ; au point 2 par exemple,  $g'(2) = 4$ . La différentielle de  $g$  au point 2 est une fonction d'une variable réelle, notée  $dg(2)$  et définie par  $dg(2)(h) = 4h$ .

Plus généralement la différentielle au point  $x_0$  de toute fonction  $g$  d'une seule variable est une fonction notée  $dg(x_0)$  et définie par  $dg(x_0)(h) = hg'(x_0)$ . On sait que la dérivée de  $g$  au point  $x_0$  est définie par  $g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ , ce qu'on peut écrire  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$ . On a donc

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - hg'(x_0)}{h} = 0.$$

Par analogie avec cette formule nous allons définir la différentielle d'une fonction de deux variables :

**Définition 2.8** Une fonction réelle  $f$  de deux variables réelles est dite différentiable au point  $(x_0, y_0)$  s'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$(5) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (ah + bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

On appelle alors "différentielle de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ " la fonction de deux variables  $h$  et  $k$ , notée  $df(x_0, y_0)$  et définie par

$$(6) \quad df(x_0, y_0) = ah + bk.$$

Pour compléter l'analogie entre les formules (4) et (5), le théorème suivant précise quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$ .

**Théorème 2.9** Si  $f$  est différentiable au point  $(x_0, y_0)$  et si  $df(x_0, y_0) = ah + bk$ , alors  $a$  et  $b$  sont les dérivées partielles de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .

Démonstration : Faisons  $k = 0$  dans (5) ; on obtient  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \pm \left( \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} \right) \right) = 0$  (avec le signe  $+$  si  $h > 0$  et le signe  $-$  si  $h < 0$ ). Ce qui équivaut à  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a \right) = 0$  et à  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right) = a$ . Ceci prouve que  $a$  est la dérivée en  $x_0$  de la fonction  $f(x, y_0)$ , c'est à dire la dérivée partielle en  $(x_0, y_0)$  de la fonction  $f$  par rapport à sa première variable. On fait de même pour la dérivée partielle de  $f$  par rapport à sa deuxième variable. ■

Remarquons que la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , dont on a vérifié au

paragraphe a) qu'elle est continue, n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ . Si elle l'était,  $a$  et  $b$  seraient ses dérivées partielles en  $(0, 0)$ ; or ces dérivées partielles sont les dérivées de  $f(x, 0)$  et de  $f(0, y)$  respectivement, et elles sont nulles parce que  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ . La condition (5) équivaut alors à  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ ,

et elle n'est pas vérifiée parce que  $\frac{f(h, h)}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \frac{h^3}{2h^2 \sqrt{2}h^2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Pour qu'elle soit différentiable en  $(0, 0)$  il aurait fallu poser  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  au lieu de  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ .

Pour terminer donnons l'interprétation géométrique de la différentielle. Pour une fonction  $g$  d'une seule variable, la formule (4) a un rapport avec l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$  puisque cette équation est  $y = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0)$ . L'existence de  $g'(x_0)$  garantit l'existence de cette tangente. Pour une fonction  $f$  de deux variables, la formule (5) a un rapport avec l'équation du plan tangent au point  $(x_0, y_0)$  : cette équation est  $z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ . L'existence des dérivées partielles  $a$  et  $b$  ne garantit pas l'existence du plan tangent, par contre l'existence de la différentielle de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  est équivalente à l'existence du plan tangent.

d) Quelques théorèmes.

Toute fonction de deux variables définie au moyen de fonctions usuelles, c'est à dire définie par une seule formule faisant intervenir des sommes, produits, quotients et composées de fonctions usuelles, est différentiable sur le domaine de définition de ses dérivées partielles. C'est une conséquence du théorème suivant :

**Théorème 2.10** *Soit  $f$  une fonction réelle de deux variables réelles. Si ses dérivées partielles sont définies en un point  $(x_0, y_0)$  et si au moins une des deux est continue en ce point, alors  $f$  est différentiable en  $(x_0, y_0)$ .*

Démonstration : Il faut prouver que la condition (5) est vérifiée, en supposant par exemple que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(x_0, y_0)$ . On a

$$(7) \quad \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - ah}{h} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) - bk}{k} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

où  $a$  et  $b$  sont les dérivées partielles de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ .

Dans cette expression les termes  $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$  et  $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$  sont compris entre  $-1$  et  $1$ .

D'autre part,  $x_0$  et  $y_0$  étant fixés,  $\frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$  est le taux d'accroissement de  $f(x_0, y)$  en tant que fonction de  $y$ . Il tend vers la dérivée de cette fonction, c'est à dire vers  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ , et par conséquent le dernier terme dans (7) tend vers 0.

La démonstration est un peu plus compliquée pour l'avant dernier terme :

il faut prouver que  $\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}{h}$  tend vers  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$  c'est à dire il faut prouver qu'il a même limite que le taux d'accroissement  $\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{h}$ . D'après le théorème des accroissements finis il existe un réel  $c$  compris entre  $x_0$  et  $x_0+h$  tel que  $\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}{h}$

soit égal à la dérivée de la fonction  $f(x, y_0+k)$  au point  $c$ , c'est à dire  $\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0+k)$ . Comme on a supposé

$\frac{\partial f}{\partial x}$  continue en  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0+k)$  tend vers  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  ( $c$  tendant évidemment vers  $x_0$  quand  $h \rightarrow 0$ ). On en déduit facilement que l'avant dernier terme dans (7) tend vers 0. ■

Le théorème de Schwarz affirme qu'à certaines conditions on obtient le même résultat en dérivant une fonction d'abord par rapport à la première variable puis en dérivant la fonction obtenue par rapport à la deuxième variable, qu'en faisant l'inverse.

**Théorème 2.11** Soit une fonction réelle de deux variables réelles. Si les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  (c'est à dire la dérivée de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  par rapport à  $x$ ) et  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  (c'est à dire la dérivée de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  par rapport à  $y$ ) existent en tout point  $(x, y)$  du domaine de définition de  $f$ , et si elles sont continues en un point  $(x_0, y_0)$ , alors elles sont égales en ce point.

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  peuvent être différents pour certaines fonctions, par exemple celle du contreexemple

$$\text{de Péano : } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = -1.$$

e) Dérivation des fonctions composées (ou formule de dérivation en chaîne).

**Théorème 2.12** Soit  $f$  une fonction différentiable réelle de deux variables réelles, et soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions dérivables réelles d'une variable réelle. Soit  $f_1$  la fonction composée, définie par

$$f_1(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Elle a pour dérivée

$$f_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

$$(\text{en abrégé : } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}).$$

Démonstration : Soit  $t_0$  un élément du domaine de définition de  $f_1$  ; on veut démontrer que

$$(8) \quad f_1'(t_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \psi'(t_0) = 0.$$

Compte tenu que la dérivée d'une fonction est la limite de son taux d'accroissement, (8) équivaut à

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - a \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} - b \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \right) = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont les dérivées partielles de  $f$  au point  $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ . Pour démontrer (9) il suffit de le comparer à (5), qui est vrai puisqu'on a supposé  $f$  différentiable.

Pour cela on pose  $x_0 = \varphi(t_0)$  et  $y_0 = \psi(t_0)$  ; on a donc  $f_1(t_0) = f(x_0, y_0)$  ; puis, en posant  $h = \varphi(t) - x_0$  et  $k = \psi(t) - y_0$  on a  $f_1(t) = f(x_0 + h, y_0 + k)$ . Finalement la relation (9) équivaut à

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (ah + bk)}{t - t_0} \right) = 0$$

et à

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (ah + bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{t - t_0} \right) = 0.$$

C'est la limite d'un produit ; le premier terme de ce produit tend vers 0 d'après (5), et le second vaut

$$\frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{t - t_0} = \pm \sqrt{\frac{h^2}{(t - t_0)^2} + \frac{k^2}{(t - t_0)^2}} = \pm \sqrt{\left( \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right)^2 + \left( \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \right)^2}$$

et il tend vers  $\pm \sqrt{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}$ . Le produit des deux termes tend donc vers 0, ce qui prouve le théorème. ■

*Application :* Soit  $f$  une fonction réelle de deux variables réelles  $x$  et  $y$ , qu'on considère comme les coordonnées d'un point  $M$  du plan. On veut calculer les dérivées partielles de  $f$ , non pas par rapport à  $x$  et  $y$  mais par rapport aux coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  du point  $M$ . D'abord par manque de chance le théorème ne s'applique pas puisque  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$  sont fonctions de deux variables, alors que dans le théorème ils sont fonctions d'une seule variable. Mais comme il s'agit de dérivées partielles on

fixe une des deux variables, par exemple  $\theta$ , et  $x$  et  $y$  sont alors fonction de la seule variable  $\rho$ . Comme les dérivées de  $\rho \cos \theta$  et  $\rho \sin \theta$  par rapport à  $\rho$  sont respectivement  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ , on a d'après le théorème

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \theta$$

(où on a remplacé le  $\frac{df}{dt}$  par  $\frac{\partial f}{\partial \rho}$  pour tenir compte du fait que  $f$  est fonction des deux variables  $\rho$  et  $\theta$ ).

De même en dérivant par rapport à  $\theta$  on a

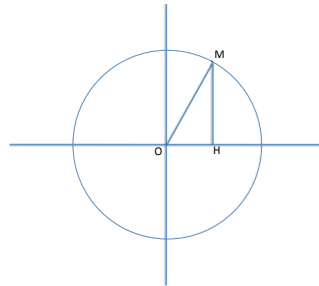
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \rho \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \rho \cos \theta.$$

## 2.3 Courbes

a) Équation d'une courbe plane (exemples).

L'équation d'une courbe plane  $\mathcal{C}$  donne la condition sur  $x$  et  $y$  pour que le point  $M(x, y)$  appartienne à  $\mathcal{C}$ . Par exemple on sait que l'équation de la droite de pente  $a$  passant par le point  $B(0, b)$  est  $y = ax + b$ . L'équation du cercle de centre  $\Omega(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  peut être donnée sous la forme  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ . Prenons l'exemple du cercle trigonométrique (de centre  $O$  et de rayon 1) :

$$x^2 + y^2 = 1$$

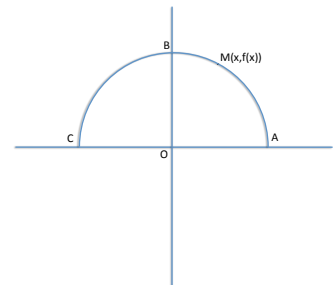
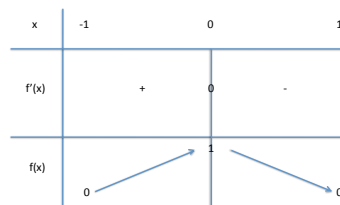


Par le théorème de Pythagore,  $OM^2 = OH^2 + HM^2 = x^2 + y^2 = 1$  donc le point  $M(x, y)$  est à distance 1 du point  $O$  c'est à dire il est sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

On peut aussi mettre l'équation du cercle trigonométrique sous la forme  $y = f(x)$  : la relation  $x^2 + y^2 = 1$  équivaut à  $y^2 = 1 - x^2$  c'est à dire  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ou  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ . Faisons l'étude de la fonction  $\sqrt{1 - x^2}$  :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

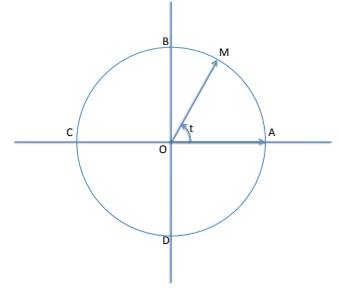


D'après ce tableau de variations le point  $A(1, 0)$  correspond à un minimum de la fonction  $f$ , le point  $B(0, 1)$  à un maximum et le point  $C(-1, 0)$  à un minimum. La courbe de  $f$  est un demi cercle, pour avoir le cercle entier il faudrait ajouter la courbe de la fonction  $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ .

Pour avoir une représentation paramétrique du cercle trigonométrique, on remarque que deux réels  $x$  et  $y$  vérifient la relation  $x^2 + y^2 = 1$  si et seulement si il existe un réel  $t$  tel que  $x = \cos t$  et  $y = \sin t$ , et ces deux équations constituent une des représentation paramétrique possibles du cercle. Géométriquement,  $t$  est l'angle entre le vecteur  $\vec{OA}(1, 0)$  et le vecteur  $\vec{OM}(x, y)$ . On peut construire la courbe à partir de sa représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

|         |   |         |       |          |        |   |
|---------|---|---------|-------|----------|--------|---|
| t       | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |   |
| $x'(t)$ | - | -       | 0     | +        | +      |   |
| $y'(t)$ | + | 0       | -     | -        | 0      | + |
| $x(t)$  | 1 | 0       | -1    | 0        | 1      |   |
| $y(t)$  | 0 | 1       | 0     | -1       | 0      |   |



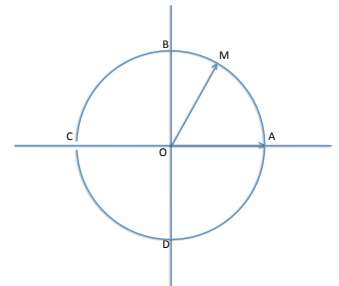
Le tableau de variations s'interprète graphiquement de la façon suivante : comme la fonction  $x(t)$  varie entre  $x(\pi) = -1$  et  $x(0) = x(2\pi) = 1$ , la courbe est comprise entre la droite verticale d'équation  $x = -1$  et la droite verticale d'équation  $x = 1$ , et par conséquent elle est tangente à la première droite au point  $C(x(\pi), y(\pi)) = C(-1, 0)$  et à la deuxième au point  $A(1, 0)$ . De même, elle admet des tangentes horizontales aux points  $B(0, 1)$  et  $D(0, -1)$ .

Il y a aussi l'interprétation mécanique :  $t$  représente le temps et, dans cet exemple, il représente aussi l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ , par conséquent le point  $M$  se déplace à vitesse constante sur le cercle en partant du point  $A$  (au temps  $t = 0$ ) pour passer par  $B, C, D$  et retourner en  $A$  (au temps  $t = 2\pi$ ).

Donnons une autre représentation paramétrique (dite rationnelle) du cercle trigonométrique :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

| t       | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+$ |   |
|---------|-----------|----|---|---|-----|---|
| $x'(t)$ | +         | +  | 0 | - | -   |   |
| $y'(t)$ | -         | 0  | + | + | 0   | - |
| $x(t)$  | -1        | 0  | 1 | 0 | -1  |   |
| $y(t)$  | 0         | -1 | 0 | 1 | 0   |   |



La courbe est un cercle parce qu'on peut vérifier par le calcul que  $(x(t))^2 + (y(t))^2$  vaut 1. Le point  $C(-1, 0)$  n'est jamais atteint : il n'existe pas  $t$  tel que  $(x(t), y(t)) = (-1, 0)$ , par contre la limite de  $(x(t), y(t))$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$  est  $(-1, 0)$ . Les points  $D, A, B$  sont atteints respectivement pour  $t = -1, t = 0$  et  $t = 1$ .

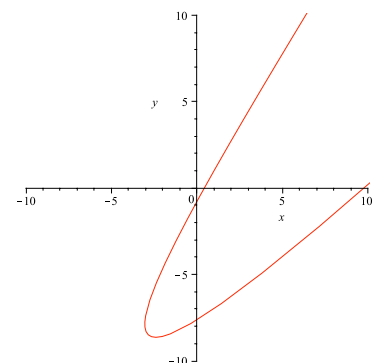
L'interprétation mécanique de ce paramétrage du cercle est moins naturelle : ce n'est pas le point  $T$  (intersection de la droite  $(OM)$  avec la droite verticale d'équation  $x = 1$ ) qui se déplace à vitesse constante mais le point  $T'$  d'abscisse 1 tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT'}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ .

Autre exemple un peu plus compliqué : la courbe paramétrée d'équations  $\begin{cases} x(t) = e^t - 5t \\ y(t) = e^t - 8t \end{cases}$  n'est pas une courbe d'équation  $y = f(x)$ , avec  $f$  composée de fonctions usuelles. En effet il n'est pas possible de calculer  $t$  en fonction de  $x(t)$  et encore moins de calculer  $y(t)$  en fonction uniquement de  $x(t)$ .

On se limitera à l'intervalle  $t \in \left[-\frac{6}{5}, \frac{36}{11}\right]$  de façon que  $x(t)$  et  $y(t)$  ne dépassent pas 10 :

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 5t \\ y(t) = e^t - 8t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = e^t - 5 \\ y'(t) = e^t - 8 \end{cases}$$

| t       | $-6/5$ | $\ln(5)$ | $\ln(8)$ | $36/11$ |
|---------|--------|----------|----------|---------|
| $x'(t)$ | -      | 0        | +        | +       |
| $y'(t)$ | -      | -        | 0        | +       |
| $x(t)$  | 6,3    | -3       | -2,4     | 10      |
| $y(t)$  | 9,9    | -7,9     | -8,6     | 0,2     |



D'après le tableau de variations la courbe est incluse dans le quart de plan délimité par la droite d'équation  $x = 5 - 5 \ln(5) \simeq -3$  (parce que  $x(t) \geq 5 - 5 \ln(5)$  pour tout  $t$ ) et la droite d'équation  $y = 8 - 8 \ln(8) \simeq -8,6$  (parce que  $y(t) \geq 8 - 8 \ln(8)$  pour tout  $t$ ). Ces deux droites sont tangentes à la courbe aux points de contacts. Au temps  $t = -\frac{6}{5}$  le point  $M(x(t), y(t))$  a pour coordonnées 6,3 et 9,9, et au temps  $t = \frac{36}{11}$  il a pour coordonnées 10 et 0,2; au temps  $t = 0$  il a pour coordonnées (1,1) et par conséquent la courbe passe en dessous de l'origine. Pour la dessiner il suffit de placer le point de coordonnées (1,1) et les quatre points considérés dans le tableau de variations, puis de tracer une courbe la plus régulière possible qui relie ces cinq points.

b) Ce qu'il faut savoir sur les courbes paramétrées.

**Définition 2.13** – La courbe paramétrée définie par deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  est l'ensemble des points  $M(x(t), y(t))$  (pour tout  $t$  dans le domaine de définition des fonctions  $x$  et  $y$ ).

– Un point  $M(x(t), y(t))$  est dit singulier si  $x'(t) = y'(t) = 0$ .

– On dit qu'un point  $M$  est double s'il existe  $t_1$  et  $t_2$  distincts tels que  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$  soient les coordonnées de  $M$ .

– On dit que la courbe admet une branche infinie en  $t \rightarrow t_0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t)$  ou  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t)$  est infini, et qu'elle admet pour asymptote la droite d'équation  $ax + by + c = 0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} (ax(t) + by(t) + c) = 0$ .

Les définitions sont analogues pour les courbes paramétrées dans l'espace (appelées courbes gauches), définies par trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .

**Théorème 2.14** – La pente de la tangente au point  $M(x(t), y(t))$  est égale à  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  si  $x'(t) \neq 0$ . Cette tangente est verticale si  $x'(t) = 0$  et  $y'(t) \neq 0$ .

– Si la courbe admet une asymptote  $(D)$  quand  $t \rightarrow t_0$ , alors la distance du point  $M(x(t), y(t))$  à la droite  $(D)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow t_0$ .

– Supposons que les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  soient définies sur  $\mathbb{R}$  ou sur un intervalle  $[-a, a]$ . Alors la courbe est

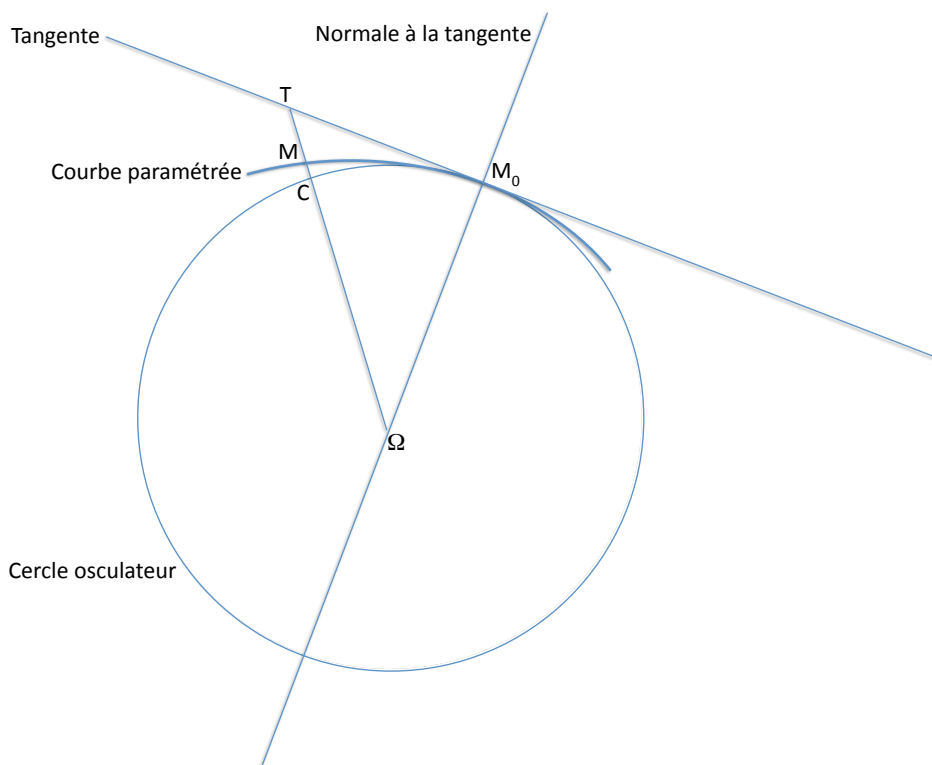
symétrique par rapport à l'axe des  $x$  si  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ ;

symétrique par rapport à l'axe des  $y$  si  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ ;

symétrique par rapport à l'origine si  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ .

c) Quelques autres définitions et formules.

On considère une courbe paramétrée, et un point  $M_0$  de cette courbe. Remarquons d'abord que tout cercle centré sur la droite orthogonale à la tangente à la courbe au point  $M_0$ , admet la même tangente en ce point; ces cercles sont donc proches de la courbe au voisinage de  $M_0$ . Parmi eux, un seul cercle possède la propriété suivante :



le rapport  $\frac{CM}{CT}$  tend vers 0 quand le point  $M$  (de la courbe paramétrée) tend vers  $M_0$ . Ce cercle s'appelle *cercle osculateur*, son rayon  $R = \Omega M_0$  s'appelle *rayon de courbure*. Ce qu'on appelle *courbure au point  $M_0$*  c'est  $\rho = \frac{1}{R}$ .

Le calcul (voir [http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure\\_d'un\\_arc](http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_d'un_arc)) donne  $\rho = \frac{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|}{v_0^3}$ , où  $x'_0$  et  $y'_0$  sont les dérivées des fonctions  $x$  et  $y$  au temps  $t = t_0$ ,  $x''_0$  et  $y''_0$  sont leurs dérivées secondes, et  $v_0 = \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$  est la vitesse du point  $M$  au temps  $t = t_0$ .

La définition géométrique du cercle osculateur est la même dans le cas d'une courbe dans l'espace. Le plan qui contient ce cercle s'appelle *plan osculateur*.

D'autre part la longueur de la courbe parcourue par le point  $M(x(t), y(t))$  entre le temps  $t_1$  et le temps  $t_2$  est égale à  $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

d) Classification des coniques (<http://fr.wikipedia.org/wiki/Conique>).

On appelle *conique* toute courbe d'équation  $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0$ , où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$  sont des constantes réelles. On démontre qu'une telle courbe est soit un cercle, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, sauf dans des cas particuliers où on obtient une ou deux droites, un point, ou un ensemble vide.

Pour s'en convaincre donnons trois exemples :

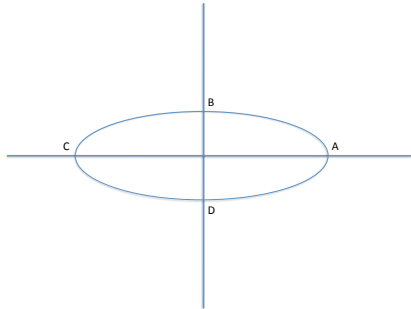
$x^2 + x + y + 1 = 0$  est l'équation d'une parabole puisqu'elle équivaut à  $y = -x^2 - x - 1$  ;

$x^2 + y^2 - 1 = 0$  est l'équation du cercle trigonométrique ;

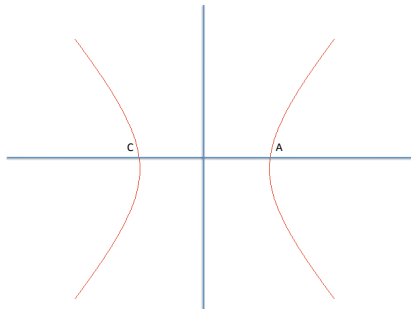
$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$  équivaut à  $(x - y)^2 = 1$  ce qui fait  $x - y = 1$  ou  $x - y = -1$  : on obtient deux droites, d'équations  $y = x - 1$  et  $y = x + 1$ .

Donnons d'autres exemples plus généraux. D'abord l'équation du cercle de rayon  $R$  centré à l'origine est  $x^2 + y^2 = R^2$ , ce qu'on peut mettre sous la forme  $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$ . Plus généralement, quelles que soient les constantes  $a$  et  $b$ ,

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  est l'équation de l'ellipse centrée à l'origine et qui passe par les points  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $C(-a, 0)$ ,  $D(0, -b)$  :



$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  est l'équation de l'hyperbole qui passe par les points  $A(a, 0)$  et  $C(-a, 0)$  et admet pour asymptote les droites d'équation  $y = \pm \frac{b}{a}x$  :



En paramétrique,

l'équation du cercle de rayon  $R$  centré à l'origine est  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \end{cases}$

l'équation de l'ellipse centrée à l'origine et qui passe par les points  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $C(-a, 0)$ ,  $D(0, -b)$  est  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \end{cases}$

l'équation de l'hyperbole qui passe par les points  $A(a, 0)$  et  $C(-a, 0)$  et admet pour asymptote les droites d'équation  $y = \pm \frac{b}{a}x$  est  $\begin{cases} x = a \cosh t = a \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \sinh t = b \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \end{cases}$