Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2012-2013

MATHEMATIQUES 01

Partiel 1 – 19 Octobre 2012

Calculette et documents non autorisés | Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$.

1. Calculer la limite de f en 0 (pour $x \neq 0$).
2. Donner la dérivée de f en dehors de 0.
3. Calculer la limite de f' en 0 (pour $x \neq 0$).

EXERCICE 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\frac{1}{1+x^2})$.

1. Montrer que f est définie partout, et négative.
2. Donner sa dérivée.
3. La fonction f, est-elle injective ?
4. Est-elle surjective ?
Soit la fonction $g :]0, +\infty[\to]-\infty, 0[$ définie par $g(x) = f(x)$.
5. La fonction g, est-elle bijective ? Si oui, donner sa fonction réciproque.
6. Dresser le tableau de variation de g, puis tracer son graphe.

EXERCICE 3

Soit $E = \{1, 2, 5\}$ un ensemble.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (ensemble de ses sous-ensembles).
2. Soit f l'application de E dans lui-même, définie par $f(1) = 2, f(2) = 5$ et $f(5) = 5$. Préciser si f est injective ou surjective.
3. Donner le nombre d'applications de E dans lui-même.
4. Soit $f : E \to E$, une application surjective. Montrer que f est bijective.
5. Donner le nombre de bijections de E dans lui-même.
6. Mettre les bons symboles ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$) en justifiant en une demi-ligne.

$\{1\} \qquad E$

$1 \qquad \mathcal{P}(E)$

$E \qquad \mathcal{P}(E)$

7. Soit g une application surjective de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même. Justifier si $\emptyset \in Im(g)$ et/ou $\emptyset \subset Im(g)$.

EXERCICE 4

Soient A et B deux sous-ensembles de E, et f une application de E dans lui-même.
Soit X l'affirmation suivante : [$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$].

1. Donner la négation de X.
2. Montrer que si X est vraie alors $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$.
3. Montrer la réciproque, c'est-à-dire, si $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$ alors X est vraie.
4. Supposons que $f(x) = x, \forall x \in E$. En déduire que si X est vraie alors $A \subset B$.