Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2012-2013

MATHEMATIQUES 01

Partiel 3 – 11 Janvier 2013

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

1. Montrer que $-x+\sqrt{x^2+1}=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$ pour tout réel x et étudier la parité de f.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

3. Calculer $f(\sinh x)$ pour tout réel x. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}.$$

1. Donner le domaine de définition de f. Calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation en précisant les valeurs aux bornes.

2. La fonction f est-elle surjective ? est-elle injective ? (Justifier).

3. Calculer $f^{-1}(\{1\})$.

4. Déterminer $f([1,+\infty[)$.

5. Quel est le plus grand intervalle sur lequel f est strictement croissante ?

6. On pose $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier n. (i) Démontrer par récurrence que $0\le u_n\le 1$ pour tout entier n.

(ii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(iii) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\ dx$ (on pourra poser $x=t\sqrt{2}$).

EXERCICE 3

1. Calculer les primitives suivantes :

$$(i)\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}\qquad (ii)\ \int\frac{dx}{\cos^2 x\tan x}\ \ (poser\ t=\tan x)$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$(i)\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\cos x+1}\ dx\qquad (ii)\ \int_1^e x^{1/2}\ln x\ dx$$

EXERCICE 4

On considère la suite $(u_n)_{n\ge 2}$ définie par

$$u_n=\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}.$$

1. Montrer que $u_n\le\dfrac{n+1}{n-1}$, pour tout $n\ge 2$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 2}$ est bornée.

3. Calculer $\lim_{n\to\infty}u_n$.