

Mathématiques générales I

Partiel 1

10 OCTOBRE 2008

Durée : 2 heures

Ni document ni calculatrice autorisés

EXERCICE 1

1. Représenter un graphe simple à 5 sommets, tous de degré 2.
2. On suppose maintenant que 4 sommets sont de degré 2. On cherche le degré du cinquième sommet.
 - 2.1. Peut-il être de degré impair ? Justifier.
 - 2.2. Peut-il être de degré ≥ 6 ? Justifier.
 - 2.3. Donner les degrés possibles du cinquième sommet, et représenter les différentes possibilités.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans $\mathbb{R} - \{0\}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est bijective, puis donner sa réciproque.
3. Déterminer $g^{-1}(\{0\})$, et en déduire que g n'est pas bijective.
4. Montrer que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = \{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$).
5. Peut-on parler de la fonction $g \circ f$ ou $f \circ g$?

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$. Puis, donner le module et l'argument des solutions.

EXERCICE 4

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

EXERCICE 5

1. Dessiner un graphe simple dont les sommets représentent les nombres de 1 à 9, dans lequel deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si la somme des nombres correspondants est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre premier). Indiquer sur le graphe, le degré de chaque sommet.
2. Donner un chemin de longueur 3.
3. Le graphe est-il connexe ? Combien de composantes connexes a-t-il ? Les expliciter.

EXERCICE 6

Donner les solutions de $z^3 = -8$ sous formes géométrique et cartésienne. Existe-t-il une solution avec une partie imaginaire négative ?

EXERCICE 7

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan, tels que $|z - i| = |z + i|$. Préciser s'il s'agit d'un sous-ensemble connu du plan.