Université de Provence 2009-2010
Licence MI 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 1

9 Octobre 2009

Durée : 2 heures *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Remplir avec les bons symboles parmi $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow, \in, \subset, =, \notin, \neq, \not\subset$.
Notations : A et B sont des sous-ensembles d'un même ensemble X ;
f est soit une application de l'ensemble E dans l'ensemble F, soit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f majorée	f bornée
$\{1, 2\}$	$\{1,2,3\}$
A	$\mathcal{P}(A)$
$\{1\}$	$\{\{1\},\{1,2\}\}$
$f(2) \neq f(3)$	f injective
A	$A \cup B$
$\emptyset$	$\mathcal{P}(A)$
f surjective	$F \subset f(E)$.
1	$\{\{1\},\{1,2\}\}$

Exercice 2

Soient les lettres de l'alphabet : $a, b, d, e, i, j, n, o, r, s$. Chaque lettre représente un sommet dans un graphe, où deux sommets sont reliés s'ils appartiennent à un même mot dans la phrase "je dors bien".
Tracer le graphe. Est-il connexe ? Si non, préciser le nombre de ses composantes connexes et les expliciter.

Exercice 3

Soit G un graphe à 5 sommets. On suppose que tous ses sommets sont de même degré d.
1. Montrer que d est pair.
2. Montrer que si G est connexe mais non complet alors $d = 2$. En déduire que G est un cycle (tracer G).

Exercice 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$.
1. f est-elle injective ? Justifier
2. f est-elle surjective ? Justifier
3. Déterminer $f\big(f^{-1}([0, 2])\big)$.
4. Déterminer $f^{-1}\big(f([0, 2])\big)$.

T.S.V.P.

Exercice 5

On considère une application f d'un ensemble E dans un ensemble F, deux sous-ensembles A et B de E et deux sous-ensembles A' et B' de F.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

2. Montrer que si $A' \subset B'$ alors $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

Exercice 6

Soit f l'application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Montrer que f est bijective, et donner sa fonction réciproque.

Exercice 7

1. En utilisant les formules d'Euler montrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $4\cos^3(x) = 3\cos(x) + 1$.

Exercice 8

1. Le nombre $z = 4 - 3i$ est-il racine de l'unité ? Justifier.

2. le nombre i est-il racine cubique de l'unité ? Justifier.

Exercice 9

Ecrire $2i - 2$ sous forme polaire (ou forme exponentielle), puis en déduire les trois racines cubiques de $2i - 2$.