

Solutions (1^{er} partiel de mathématiques)

1 Question de cours et questions courtes

a) Soit A,B,C trois points non alignés :

Comment calculer l'aire du parallélogramme $ABDC$, avec :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}?$$

Calculer l'aire du triangle ABC .

Solution : L'aire du parallélogramme $ABDC$ est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ et l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

b) Montrer que si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

sont orthogonaux, alors :

La norme du produit vectoriel est le produit des normes, soit :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|$$

Solution : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|$.

c) Donner les solutions d'une équation différentielle du type :

$$y'' + ay = P(x)$$

a étant un réel strictement positif et $P(x)$ un polynôme de degré n .

On indiquera la méthode et la forme générale des solutions.

Solution : La solution générale de l'équation sans second membre étant $A \cos(x\sqrt{a}) + B \sin(x\sqrt{a})$, on détermine les coefficients d'un polynôme $Q(x)$ de degré n tel que $Q''(x) + aQ(x) = P(x)$. La solution générale de l'équation complète est alors $y(x) = Q(x) + A \cos(x\sqrt{a}) + B \sin(x\sqrt{a})$.

2 Exercice produit vectoriel

Exercice 1 a) Pour les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, calculer la somme des carrés des aires des triangles OAB , OBC et OCA . Vérifier qu'elle est égale au carré de l'aire de ABC . Quelle est l'équation du plan contenant les points A , B et C ?

Solution : OAB est la moitié d'un carré de côté 1, son aire est donc $\frac{1}{2}$. De même pour OBC et OCA . La somme des carrés des aires vaut $\frac{3}{4}$.

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, l'aire du triangle ABC est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son carré est $\frac{3}{4}$.

b) A , B et C sont maintenant des points quelconques de l'espace, on suppose seulement que les vecteurs \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , et \overrightarrow{OC} sont orthogonaux deux à deux. Démontrer que la somme des carrés des aires des triangles OAB , OBC et OCA est égale au carré de l'aire de ABC (indication : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, ...).

Solution :

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABC) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \wedge (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})\| \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\|. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AO}$ est nul parce que le sinus de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO})$ est $\sin(0) = 0$. D'autre part $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ est la somme de trois vecteurs orthogonaux deux à deux, parce que $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OC}$ est colinéaire à \overrightarrow{OB} ,

etc. Quand trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont orthogonaux deux à deux, $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ est égal (en développant) à $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$. On a donc

$$\begin{aligned} (\text{aire}(ABC))^2 &= \frac{1}{4} \left(\|\vec{AO} \wedge \vec{OC}\|^2 + \|\vec{OB} \wedge \vec{AO}\|^2 + \|\vec{OB} \wedge \vec{OC}\|^2 \right) \\ &= (\text{aire}(OAB))^2 + (\text{aire}(OBC))^2 + (\text{aire}(OCA))^2. \end{aligned}$$

3 Exercices équations différentielles

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle :

$E_1 : xy' + 3y = 0$, avec $y(2) = 1$

Solution : $y(x) = \frac{8}{x^3}, x \in]0; +\infty[$.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles :

a) $y' = -3y + e^{5x}$

Solution : $y(x) = Ke^{-3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$.

b) $y'' + y' + y = x^2$

Solution : $y(x) = x^2 - 2x + Ae^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

c) $y'' + 2y' - y = \sin x + \cos x$

Solution : $y(x) = -\frac{1}{2} \cos x + Ae^{(-1+\sqrt{2})x} + Be^{(-1-\sqrt{2})x}$.

Exercice 4 La quantité u d'un élément radioactif est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{du}{dt} = -au.$$

a) Résoudre l'équation différentielle ;

Solution : $u(t) = Ke^{-at}$.

b) La demi-vie d'un élément est le temps qu'il faut attendre pour qu'une quantité de cet élément diminue de moitié : par exemple, la demi-vie de l'uranium 238 est de $4.5 \cdot 10^4$ ans ;

1. Calculer la constante a en fonction de la demi-vie.

Solution : Comme $K = u(0)$, on résoud $u(0)e^{-4.5 \cdot 10^4 a} = \frac{u(0)}{2}$, on obtient $a = \frac{\ln 2}{4.5 \cdot 10^4}$.

2. Combien de temps faut-il attendre pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de un pour cent ?

Solution : Comme $K = u(0)$, on résoud $u(0)e^{-\frac{\ln 2}{4.5 \cdot 10^4} t} = \frac{99}{100}u(0)$, on obtient $t = \frac{4.5 \cdot 10^4}{\ln 2} \ln\left(\frac{100}{99}\right)$.