Mathématiques générales I

Partiel 2

31 Octobre 2008

Durée : 2 heures *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan, tels que $\dfrac{|z-i+2|}{|z+3i-2|} = \sqrt{3}$.

Exercice 2

Soient P le plan d'équation cartésienne $x-y+2z-1=0$ et Q le plan d'équation cartésienne $x-3z+4=0$.
1. Donner une équation paramétrique de la droite d'intersection de ces deux plans. En déduire un vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Donner un vecteur $\vec{v}$ de P et un vecteur $\vec{w}$ de Q, tous deux orthogonaux à $\vec{u}$.
3. Donner le sinus de l'angle entre P et Q.

Exercice 3

Soient $\overrightarrow{U}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{V}(0,\sqrt{2}+1,0)$. **1.** Donner l'angle entre $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.
2. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.
3. Donner une équation cartésienne et paramétrique du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{U}$ et passant par $A(1,1,1)$.
4. Calculer la distance de l'origine à ce plan $\mathcal{P}$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ le cercle dans le plan, de centre $I(3,1)$ de rayon 2. **1.** Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Soit E l'ensemble des points du plan d'argument $\pi/4$ (modulo 2π).
Montrer que $M(x,y) \in E \Leftrightarrow \big(y = x \text{ et } x \geq 0\big)$.
3. Donner les coordonnées cartésiennes des points de $\mathcal{C}$ d'argument $\pi/4$ (modulo 2π).
On note A et B ces points.
4. Soit (D) la droite d'équation cartésienne $x-y=0$. Faire une figure propre représentant $\mathcal{C}$ et (D).
5. Montrer que $\overrightarrow{IA}$ n'est pas perpendiculaire à (D).
6. En déduire sans aucun calcul que $d(I;D) < 2$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ un plan dans l'espace. Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ pris dans ce plan.
Montrer sans calcul que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{u}\wedge\vec{w}) = \vec{0}$.

Exercice 6

Soient A, B et C les points de coordonnées $A(1,1)$, $B(10,1)$ et $C(4,0)$. On note (AB) la droite qui passe par A et B, et (D) la droite qui passe par $C(4,0)$ et perpendiculaire à (AB). **1.** Donner une équation paramétrique de (AB) et une équation cartésienne de (D). Puis calculer les coordonnées du point d'intersection $E(x_E, y_E)$ entre (AB) et (D).
Soit h une similitude du plan de centre $I(x_I, y_I)$, d'angle θ et de rapport r.
2. Donner explicitement $h\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, sous la forme $h(z) = \alpha z + \beta$ où α et β sont deux nombres complexes, en fonctions de θ et de r.
3. On suppose que la droite (AB) est invariante (cad que l'image de (AB) est (AB)). En déduire que $\theta = 0$ ou π modulo 2π, et que $I \in (AB)$.
4. Montrer que si (D) est aussi invariante par h, alors $I = E$.
5. On suppose que $I = E$ et que $h(A) = B$. Montrer que $re^{i\theta} = -2$, puis en déduire r et θ.