Université de Provence | 2009-2010
Licence MI | 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 2 : Géométrie

6 Novembre 2010

Durée : 2 heures — *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

Soient A, B deux points distincts de l'espace. Sans calculs, déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient :

1. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$:

2. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$:

3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$:

Soient A, B deux points distincts du plan. Sans calculs, déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

4. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$:

5. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$:

Exercice 2

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x + 2y = 3, (AC) : x + y = 2, (BC) : 2x + 3y = 4$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C.
2. Donner les coordonnées des milieux A', B', C' de $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 3

Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t + 3s \\ z = -s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = -3 + 5t - s \\ z = 2 - t + s \end{cases}$$

Donner une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 4

Soient M_1, M_2 et M_3 trois points d'affixe z_1 , z_2 et z_3 respectivement. **1.** Montrer que ces trois points sont les sommets d'un triangle isocèle si il existe $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ de module 1 tel que

$$(1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 - z_3 = 0$$

2. Montrer la réciproque.
3. Exprimer l'angle en M_1 en fonction de α.'

EXERCICE 5

Soient trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, de centres respectifs I_1 $(2,0)$, $I_2(0,2)$,$I_3(0,1)$ et de rayons respectifs 1, 1 et $\frac{1}{2}$.

1. Représenter soigneusement les trois cercles sur une figure.
2. Soit f la similitude de centre $(0,0)$ qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.
2.1. Donner le rapport et l'angle de f.
2.2. En déduire l'expression de f.
2.3. Cette similitude est-elle une homothétie ?
3. Soit g la similitude de centre $(0,0)$ qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$.
3.1. Donner le rapport et l'angle de g.
3.2. En déduire l'expression de g.
3.3. Cette similitude est-elle une rotation ?

4. Donner les affixes z_1 et z_2 des centres de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.
5. Soit h une similitude qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$.
5.1. Montrer que si A d'affixe z_A est le centre de h alors $|z_1 - z_A| = |z_2 - z_A|$.
5.2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes qui envoient $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. Montrer qu'un point M d'affixe z est le centre d'une similitude dans $\mathcal{S}$ si et seulement si $|z_1 - z| = |z_2 - z|$.
5.3. En déduire l'ensemble des points du plan qui sont les centres des similitudes dans $\mathcal{S}$.

6. Soit k une similitude qui envoie $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$.
6.1. Montrer que si B d'affixe z_B est le centre de k alors $|z_1 - z_B| = 2|z_3 - z_B|$.
6.2. Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des similitudes qui envoient $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$. Montrer qu'un point M d'affixe z est le centre d'une similitude dans $\mathcal{Z}$ si et seulement si $|z_1 - z| = 2|z_3 - z|$.
6.3. En déduire l'ensemble des points du plan qui sont les centres des similitudes dans $\mathcal{Z}$.

7. (FACULTATIF)
Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives : $x + y + 1 = 0$ et $x - y - \frac{1}{2}$.
Soit s une similitude qui envoie $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_3$. Soit A son centre.
7.1. Faire une figure.
7.2. Quel est le rapport et l'angle de s ?
7.3. Que peut on dire en termes d'angle et de norme des vecteurs $\overrightarrow{I_1A}$ et $\overrightarrow{I_3A}$?
7.4. En déduire les centres possibles pour s.

EXERCICE 6

Soient A, B et C d'affixes a,b,c.
On suppose que

$$a + bj + cj^2 = 0$$

(où j est un racine troisième de l'unité non réelle).
Montrer que (ABC) est équilatéral.
(aide : on rappelle que on a $1 + j + j^2 = 0$)

Fin du sujet