Université de Provence | 2009-2010
Licence MI | 1ère année-S1

Mathématiques générales I

Partiel 3 : Fonctions réelles et suites

27 novembre 2009

Durée : 2 heures | *Ni document ni calculette autorisés*

Exercice 1

1. Soit $f_2(x) = x^2 + x - 1$. Montrer que l'équation $f_2(x) = 0$ admet une solution **positive unique**, notée α_2, et montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha_2 < \dfrac{3}{4}$.

2. Étant donné $n \geq 2$ on définit f_n par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

2.1. Montrer que f_n est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.
2.2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution **positive unique** α_n.
2.3. Montrer que $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha_n)^{n+1}$ *(indication : on peut d'abord calculer $f_n(x)$)*.
2.4. Montrer que $\alpha_{n+1} < \alpha_n < 1$ *(indication : comme f_n est croissante, toute inégalité $a < b$ est équivalente à $f_n(a) < f_n(b)$)*.
2.5. Montrer que (α_n) est convergente et déterminer sa limite.
2.6. *(facultatif)* Calculer $f_n(1)$ et en déduire la valeur de la dérivée de ${f_n}^{-1}$ au point $n - 1$.

Exercice 2

Étude et graphe des deux fonctions

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2 + \sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

Déterminer la position des courbes par rapport à la tangente au point $(1, 0)$.

Exercice 3

Soit $f(x) = \sin(e^{-x})$.
1. Étudier f sur $[-1, +\infty[$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1, 0[$ tel que f décroît strictement sur $[\alpha, +\infty[$.

3. Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$. Déterminer φ^{-1}.

Exercice 4

1. On définit une fonction f en posant

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right).$$

Quel est son domaine de définition ? Calculer sa limite quand x tend vers 0. Que faut-il poser pour prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$. Que faut-il poser pour prolonger g en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

1. Énoncer le théorème de Rolle.

2. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On se propose de démontrer par deux méthodes différentes qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>1ère méthode</u> :

On définit une fonction auxiliaire g en posant

$$g(t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{t}{1-t}\right) & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Démontrer qu'elle est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$; appliquer le théorème de Rolle puis conclure qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>2ème méthode</u> :

- Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.
- Montrer qu'il existe $\beta \in]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = \dfrac{1}{2}$.
- Montrer qu'il existe $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2 \cdot (-1)^n$.

1. Est-elle convergente ? (justifier)

2. Est-elle bornée ?

3. Est-elle croissante ?

4. Est-elle une suite géométrique ?

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_n$.

Fin du sujet