Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales I

Durée : deux heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

Partiel du 16 décembre 2009

– I –

En effectuant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx.$$

– II–

1) Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

2) On pose :

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Etablir une relation entre I et J. En déduire la valeur de J.

– III–

Calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx,$$

et

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx.$$

– IV –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{t\sqrt{1+y^2(t)}}{y(t)}$$

1. Calculer une solution de cette équation qui vérifie $y(0)=\sqrt{3}$.
2. Cette solution est-elle unique ?

– T.S.V.P –

– V –

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = \sqrt{1+t^2}. \tag{E}$$

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(1+t^2)y'(t) + ty(t) = 0. \tag{e}$$

2. Calculer la solution de l'équation homogène (e) qui vérifie $y(0) = 1$.
3. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle (E) en appliquant la méthode de la variation de la constante.
4. En déduire la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

– VI –

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 9\cos(\sqrt{2}t) \tag{E}$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t)$.
3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$.
5. Comment se comporte la solution de cette équation différentielle quand t tend vers l'infini ?