Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

Durée : deux heures. Calculettes interdites.

Seul document autorisé : tableau de primitives.

Partiel du 15 décembre 2010

– I –

1) Calculer :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

2) Calculer :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x\cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

3) Calculer :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

– II–

En effectuant deux intégrations par parties, calculer :

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(2x)dx.$$

– III –

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$.

En calculant $I+J$ et $I-J$, déterminer I et J.

– IV –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{ty(t)}{ln(y(t))}$$

1. Calculer la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = e$.
2. Quel est l'ensemble de définition de la solution ? Préciser l'ensemble des valeurs de la solution.

– T.S.V.P –

– V –

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) + ty(t) = te^{-t^2}. \qquad (E)$$

1. Calculer la solution générale de l'équation différentielle homogéne (e) associée.
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation non-homogéne (E).
3. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$.
4. La solution de cette équation différentielle tend-elle vers une limite quand t tend vers l'infini ? Si oui quelle est cette limite ?

– VI –

Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) + (1 + tan^2(t))y(t) = t \quad exp(-tan(t)). \qquad (E)$$

1. Calculer la solution générale de l'équation homogéne associée.
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, calculer une solution particuliére de l'équation différentielle (E).
3. En déduire la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

– VII –

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = te^t \qquad (E)$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$, vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme de $(at + b)e^t$.
3. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
4. Trouver la solution de l'équation différentielle (E), vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$.