

Partiel du 21 mars 2005
Sans document ni calculatrice

Note : la copie doit être bien présentée, lisible et propre. Les questions rédigées dans un style télégraphique seront affectées d'un nombre de points inférieur à celui du barème. Enfin, il sera enlevé un cinquième de point par faute d'orthographe.

Questions de cours

- ⑤ {
1. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de
 - 0,5 • jauge sur $[a, b]$,
 - 0,5 • subdivision pointée de $[a, b]$,
 - 1 • subdivision δ -fine.
 - 1 + 2 2. Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercices

1. Calculer les primitives suivantes :

③ { 1,5 + 1,5 $\int (x^2 + x + 1)e^x dx, \int \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx$

2. On considère une subdivision pointée $\mathcal{P}$ de $[0, 1]$ en deux intervalles :

$$\mathcal{P} = \{(I_1, t_1), (I_2, t_2)\},$$

et on suppose que t_1 est le milieu de I_1 . Comment choisir I_1, I_2 et t_2 pour que $\mathcal{P}$ soit δ -fine pour la jauge

③ { 2 $\delta(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 2/3 & \text{si } t = 1. \end{cases}$

- 1 Calculer alors $S(f, \mathcal{P})$ pour $f(x) = \cos(\pi x)$.

3. Soient f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, $x_0 \in]0, 1[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in]0, 1[$. Montrer que l'on a les inégalités suivantes :

③ { 1,5 + 1,5 $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2\sqrt{x_0 + h}} \leq \int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x_0 + h}} f'(x^2) dx \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2\sqrt{x_0}}.$

4. Soit f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \frac{1 - (1-x)^n}{x}, \quad x > 0.$$

Enfin, on pose

⑥ { $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$

- 1 + 0,5 (a) Montrer que f_n est continue sur $[0, 1]$, et que I_n existe.

- 1 + 1 (b) Exprimer $I_n - I_{n-1}$ comme l'intégrale d'un polynôme, que l'on calculera.

- (c) En déduire

2,5

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Partiel du 8 mars 2006
Sans document ni calculatrice

Note : la copie doit être bien présentée, lisible et propre. Les questions rédigées dans un style télégraphique seront affectées d'un nombre de points inférieur à celui du barème. Enfin, il sera enlevé un cinquième de point par faute d'orthographe.

Questions de cours

1. Donner la définition de l'intégrabilité d'une fonction f définie sur un intervalle compact $[a, b]$.
2. Énoncer et démontrer le critère de Cauchy pour l'intégrabilité.
3. Rappeler les primitives des fonctions suivantes :

$$\cos(ax), \operatorname{Log} x, \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercices

1. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{x^3(x^3-1)} dx, \int \frac{x^n}{e^x} dx \text{ et } \int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2} dx.$$

Dans la dernière, on pourra effectuer un changement de variable.

2. Soit δ une jauge sur l'intervalle $[a, b]$. Donner une preuve du lemme de Cousin (dont vous rappellerez l'énoncé) en vous inspirant de l'argumentation suivante : soit $\mathcal{C} \subset [a, b]$ l'ensemble des c tels qu'il existe une subdivision δ -fine sur $[a, c]$. Montrer que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, que $\sup \mathcal{C} = b$ et enfin que $b \in \mathcal{C}$.
3. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos^2(x) dx.$$

Partiel du 7 mars 2007
Sans document ni calculatrice

Note : la copie doit être bien présentée, lisible et propre. Les réponses rédigées dans un style télégraphique seront affectées d'un nombre de points inférieur à celui du barème. Les fautes d'orthographe seront également prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.

Exercices

1. Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et $F \subset [a, b]$ une partie fermée.

- (a) Rappeler la définition de « fermé ».
- (b) En déduire que le complémentaire de F est ouvert.
- (c) Rappeler l'énoncé du lemme de Cousin.
- (d) On se donne, pour tout élément x de F , un intervalle ouvert I_x qui contient x . Montrer qu'il existe une jauge δ sur $[a, b]$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- si $x \in F$, alors $[x - \delta(x)/2, x + \delta(x)/2] \subset I_x$,
 - si $x \notin F$, alors $[x - \delta(x)/2, x + \delta(x)/2] \cap F = \emptyset$.
- (e) Dédurre de ces propriétés et du lemme de Cousin qu'il existe une famille finie d'intervalles $I_{x_k}, k = 1, \dots, n$ tels que

$$F \subset \bigcup_{k=1}^n I_{x_k}.$$

C'est le théorème de Heine-Borel.

2. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4}, \quad \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}, \quad \int x \operatorname{Log} x dx.$$

3. Calculer la limite, quand α tend vers $+\infty$, de

$$I(\alpha) = \int_0^\pi e^{-\alpha x} \sin x dx.$$

4. On considère les deux courbes suivantes : $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 8x - y^2 = 0\}$ et $C_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 - y = 0\}$.

- (a) Quelle est la nature des courbes C_1 et C_2 ?
- (b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.
- (c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_1 et C_2 .
- (d) Déterminer l'aire du domaine plan borné délimité par C_1 et C_2 .

Question de cours

- 1. Une jauge sur $[a, b]$ est une application de $[a, b]$ dans $]0, +\infty[$.
- Une subdivision pointée $P = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$ est constituée des intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ et des points t_k tels que $a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq x_2 \leq \dots \leq t_n \leq x_n = b$.
- Elle est δ -fine si $I_k \subseteq \left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2} \right]$ pour tout k .

2. Intégration par parties:

Soient F et G dérivables en tout $x \in [a, b]$.

Dans le cas où $F'G$ est intégrable (ce qui équivaut à FG' intégrable) on a la relation

$$\int_a^b F'G = [FG]_a^b - \int_a^b FG' \quad (*)$$

Démonstration: FG est dérivable et

$$(FG)' = F'G + FG'$$

par conséquent

$$\int_a^b (FG)' = \int_a^b F'G + \int_a^b FG'$$

d'où on déduit la formule (*) puisque $\int_a^b (FG)' = [FG]_a^b$.

Exercice 1.

$$\int (x^2 + x + 1) e^x dx = (x^2 + x + 1) e^x - \int (2x + 1) e^x dx$$

$(F_1' = e^x, G_1 = x^2 + x + 1)$

$$\text{et } \int (2x + 1) e^x dx = (2x + 1) e^x - \int 2 e^x dx$$

$(F_2' = e^x, G_2 = 2x + 1)$

et compte tenu que $\int 2 e^x dx = 2 e^x + C$ on en déduit

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x + 1) e^x dx &= (x^2 + x + 1 - 2x - 1 + 2) e^x + C \\ &= \boxed{(x^2 - x + 2) e^x + C} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+5} = a + (x+2) \frac{bx+c}{x^2+2x+5} \quad \text{d'où (avec } x=-2) \quad \boxed{\frac{1}{5} = a};$$

$$\text{et } \frac{1}{x+2} = (x^2+2x+5) \frac{a}{x+2} + (bx+c) \quad \text{d'où (avec } x=-1+2i)$$

$$\frac{1}{1+2i} = 0 + (-b+2ib+c)$$

$$\frac{1-2i}{5} = (c-b) + i 2b \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{5}}, \boxed{c = 0}.$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2x+5}$$

Utilisons la dérivée de x^2+2x+5 , qui est $2x+2$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{10} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{10} \frac{2}{x^2+2x+5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{10} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} \\ &= \boxed{\frac{1}{5} \log|x+2| - \frac{1}{10} \log|x^2+2x+5| + \frac{1}{10} \arctan \frac{x+1}{2} + C} \end{aligned}$$

Exercice 2.

Il faut choisir $\boxed{0 = x_0} \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq \boxed{x_2 = 1}$.

On suppose $t_1 = \frac{x_0+x_1}{2}$ donc $t_1 = \frac{x_1}{2}$.

Remarquons que t_2 ne peut pas être < 1 parce que si $t_2 < 1$ alors $\delta(t_2) = 1-t_2$ et

$[x_1, x_2] = [x_1, 1]$ n'est pas inclus dans

$$\left[t_2 - \frac{\delta(t_2)}{2}, t_2 + \frac{\delta(t_2)}{2} \right] = \left[\frac{3t_2-1}{2}, \frac{t_2+1}{2} \right] \text{ puisque } \frac{t_2+1}{2} < 1$$

$$\text{Donc } \boxed{t_2 = 1}, \left[t_2 - \frac{\delta(t_2)}{2}, t_2 + \frac{\delta(t_2)}{2} \right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right].$$

Le seul choix possible pour x_1 est $\boxed{x_1 = \frac{2}{3}}$ donc $\boxed{t_1 = \frac{1}{3}}$;

(parce qu'il faut $x_1 \leq t_1 + \frac{\delta(t_1)}{2} = \frac{x_1}{2} + \frac{1-x_1}{2} \Rightarrow x_1 \leq \frac{2}{3}$)
on a bien $[x_0, x_1] \subseteq \left[t_1 - \frac{\delta(t_1)}{2}, t_1 + \frac{\delta(t_1)}{2} \right] = \left[0, \frac{2}{3} \right]$ et $[x_1, x_2] \subseteq \left[t_2 - \frac{\delta(t_2)}{2}, t_2 + \frac{\delta(t_2)}{2} \right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right]$.

$$f(x) = \cos(\pi x), \quad S(f, P) = |I_1| f(t_1) + |I_2| f(t_2) \\ = \frac{2}{3} \cos\left(\pi \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi) \\ = 0.$$

Exercice 3.

Par changement de variable ($x = \sqrt{u}$) on a

$$\int_{x=\sqrt{x_0}}^{x=\sqrt{x_0+h}} f'(x^2) dx = \int_{u=x_0}^{u=x_0+h} f'(u) \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

mais $\sqrt{x_0} \leq \sqrt{u} \leq \sqrt{x_0+h}$, par conséquent $\frac{1}{2\sqrt{x_0+h}} \leq \frac{1}{2\sqrt{u}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$$\text{et } \int_{x_0}^{x_0+h} f'(u) \frac{du}{2\sqrt{x_0+h}} \leq \int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x_0+h}} f'(u) \frac{du}{2\sqrt{u}} \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f'(u) \frac{du}{2\sqrt{x_0}}$$

Comme $\frac{1}{2\sqrt{x_0+h}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ sont des constantes, et $\int_{x_0}^{x_0+h} f'(u) du = f(x_0+h) - f(x_0)$,

$$\text{on a } \frac{1}{2\sqrt{x_0+h}} (f(x_0+h) - f(x_0)) \leq \int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x_0+h}} f'(x^2) dx \leq \frac{1}{2\sqrt{x_0}} (f(x_0+h) - f(x_0))$$

Exercice 4.

(a) f_n est continue en tout $x \in]0, 1]$ parce que c'est le quotient de la fonction continue $1 - (1-x)^n$ par la fonction continue non nulle x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^n - 1}{x} = -\text{dérivée de la fonction } (1-x)^n \text{ (en } x=0).$$

Or la dérivée de $(1-x)^n$ est $-n(1-x)^{n-1}$, et elle vaut $-n$ en $x=0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = n$. Comme l'énoncé a posé $f(0) = n$, la fonction f est continue aussi en $x=0$.

f continue en tout $x \in [0, 1] \Rightarrow f$ intégrable sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad I_n - I_{n-1} &= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx - \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n-1}}{x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{\cancel{1} - (1-x)^n - \cancel{1} + (1-x)^{n-1}}{x} dx
 \end{aligned}$$

(d'après la linéarité de l'intégrale, et en réduisant au même dénominateur)

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}(-(1-x) + 1)}{x} dx$$

Mais $-(1-x) + 1 = x$ se simplifie avec le dénominateur.

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \left[-\frac{(1-x)^n}{n} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n}}$$

$$(c) \quad I_n = (I_n - I_{n-1}) + (I_{n-1} - I_{n-2}) + \dots + (I_2 - I_1) + (I_1 - I_0) + I_0$$

L'intégrale I_0 est nulle puisque $\frac{1-(1-x)^0}{x} = \frac{1-1}{x} = 0$.

Donc, compte tenu du calcul de la question (b),

$$I_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

$$= \sum_{h=1}^n \frac{1}{h}$$

(**)

Calculons I_n par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
 (1-x)^n &= (-x+1)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-x)^h 1^{n-h} \\
 &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h x^h
 \end{aligned}$$

$$1 - (1-x)^n = 1 - \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h x^h = - \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} (-1)^h x^h$$

$$\frac{1 - (1-x)^n}{x} = - \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} (-1)^h x^{h-1}$$

$$\int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx = - \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} (-1)^h \int_0^1 x^{h-1} dx$$

Compte tenu que $\int_0^1 x^{h-1} dx = \left[\frac{x^h}{h} \right]_0^1 = \frac{1}{h}$, et $-(-1)^h = (-1)^{h+1}$,

$$I_n = \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} \frac{(-1)^{h+1}}{h}$$

On conclut avec (**)

Consignes du partiel 8 mars 2006

(Exercice 2, démonstration du lemme de Cousin)

Le lemme de Cousin dit que pour toute jauge sur $[a, b]$ (c'est à dire pour toute application $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$) il existe une subdivision δ -fine.

On peut le démontrer en utilisant l'ensemble :

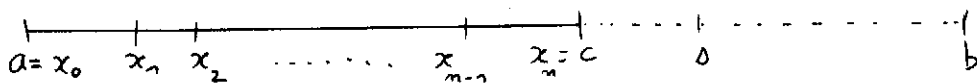
C = ensemble des $c \in [a, b]$ tels qu'il existe une subdivision δ -fine de l'intervalle $[a, c]$.

Exemple : pour $c = a$, il existe une subdivision δ -fine de $[a, a]$, cette subdivision n'a qu'un intervalle qui est l'intervalle $[a, a]$, et elle est δ -fine parce que $[a, a] \subset [a - \frac{\delta(a)}{2}, a + \frac{\delta(a)}{2}]$.

Soit $s = \sup(C)$.

L'intervalle $[s - \frac{\delta(s)}{2}, s + \frac{\delta(s)}{2}]$ contient un élément c de C (sinon s ne serait pas la borne supérieure de C).

Donc $[a, c]$ admet une subdivision δ -fine :



avec, dans chaque intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, un point de marquage t_k .

Complétons cette subdivision par un $(n+1)^{\text{ème}}$ intervalle :

$$I_{n+1} = \left[c, s + \frac{\delta(s)}{2} \right] \quad (\text{si } s + \frac{\delta(s)}{2} \leq b) \\ \text{ou } [c, b] \quad (\text{si } s + \frac{\delta(s)}{2} > b).$$

Cette subdivision est aussi δ -fine puisqu'elle vérifie la condition

$$I_{n+1} \subset \left[s - \frac{\delta(s)}{2}, s + \frac{\delta(s)}{2} \right] \quad (\text{vu qu'on a choisi } c \text{ dans cet intervalle}).$$

Le cas $s + \frac{\delta(s)}{2} \leq b$ est impossible : dans ce cas la subdivision qu'on a construite va jusqu'à $s + \frac{\delta(s)}{2}$, donc $s + \frac{\delta(s)}{2}$ appartient à C , ce qui contredit $s = \sup(C)$ (les éléments de C sont forcément $\leq s$).

Seul le cas $s + \frac{\delta(s)}{2} > b$ est possible ; mais dans ce cas on a construit une subdivision de $[a, b]$ et c'est ce qu'il fallait démontrer.