Université de Provence 2005–2006

Techniques Mathématiques de Base

PLANCHE 1

NOMBRES COMPLEXES - RAPPELS

Exercice 1. Placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan:

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \ .$$

Exercice 2. Déterminer la forme cartésienne des complexes z_1, z_2, z_3:

$$z_1 = (1+i)(1-2i), \quad z_2 = \frac{3-4i}{7+5i}, \quad z_3 = \frac{(3-2i)(5+i)}{5-i} \ .$$

Exercice 3. Écrire z_1, z_2, z_3 sous forme polaire (c'est à dire sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ avec ρ réel positif et θ réel) :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \ .$$

Exercice 4. Chacune des formules suivantes est fausse. Déterminer l'erreur sans faire les calculs :

$$e^{\frac{2i\pi}{7}} e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2}i$$

$$(1+i)(1-i) = 0$$

$$(1+i)(1-i) = 1$$

$$z^2 + z + 2 = (z-1-i)(z+2-i) \ .$$

Exercice 5. Placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan:

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \ .$$

Exercice 6. Soit α un nombre complexe différent de 0. Quel est le module de $\alpha/\bar{\alpha}$?

Exercice 7. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 8. Soient a, b deux nombres réels. Déterminer l'ensemble des nombres réels x, y vérifiant :

$$(x + ai)(b + yi) = 4 + 3i$$

Discuter selon les valeurs de a et b (suivant si $a = 0$, $b = 0$ et ab).

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$|z - 4| = |z + 2i|.$$

Exercice 10. Écrire z sous forme polaire:

$$z = 1 + cos\theta + i\ \sin\theta\ ;$$

puis calculer z^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Déterminer (sous la forme polaire) les trois complexes z_1, z_2, z_3 qui sont solutions de l'équation $z^3 = 1$, puis placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan.

Donner toutes les racines de $z^n = \alpha$. Les représenter graphiquement pour $n = 2, 4, 5$ pour $\alpha = 1$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations:

$$z^2 - 5z + 9 = 0$$

$$z^2 + 10 = 0$$

$$z^2 + 6z + 34 = 0$$

$$z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0\ .$$

Exercice 13. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Calculer $1 + j + j^2$.

b) Calculer j^n et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} j^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Soit z un nombre complexe, que peut-on dire des points d'affixe z et $-i\ \overline{z}$ dans un repère orthonormé du plan?

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition:

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 16. Définir au moyen de nombres complexes la rotation de centre $2 + 3i$ et d'angle $\pi/3$. Définir au moyen de nombres complexes la similitude de centre z_0, d'angle α et de rapport $a \neq 0$.

Exercice 17. Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z, $1/z$, et $z - 1$ aient le même module.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme polaire de $(1+i)^n$. Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?

Exercice 19. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et z tel que $e^z = \alpha$. Déterminer tous les nombres complexes u tels que $e^u = \alpha$. Application: trouver tous les nombres complexes u tels que $e^u = 1$.

Exercice 20. Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer que $\Re e(z) = |z|$ si et seulement si z est un nombre réel positif ou nul.

Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\big(z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $\mathrm{Arg}(z_1)$=$\mathrm{Arg}(z_2)\big)$.

Énoncé à rédiger et à rendre en travaux dirigés.

(exercice donné à la deuxième session 2005-2006)

1. Écrire, sous forme polaire, les deux nombres complexes
$$z_1 = 1 - i, \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$
2. Exprimer z_1^n et z_2^n pour tout entier $n \geq 1$ (sous forme polaire).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Énoncés complémentaires.

Exercice 21. Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$\cdot\ (-1+3i)^{-1}$	$\cdot\ (1+i)(1-i)$	$\cdot\ (i+1)(i-2)(i+3)$
$\cdot\ (1+i)i(2-i)$	$\cdot\ (2i+1)\pi i$	$\cdot\ (7+\pi i)(\pi+i)$
$\cdot\ \dfrac{1}{3+i}$	$\cdot\ \dfrac{2+i}{2-i}$	$\cdot\ \dfrac{2i}{3-i}$

Exercice 22. Soients $a = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $b = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$. Déterminer les formes polaires de a et b. Déterminer les formes cartésiennes et polaires du nombre complexe $\frac{a}{b}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 23. Mettre les nombres complexes qui suivent sous forme polaire:

$\cdot\ 1+i$	$\cdot\ 1+i\sqrt{2}$	$\cdot\ -3$
$\cdot\ 4i$	$\cdot\ -5i$	$\cdot\ 1-i\sqrt{2}$

Exercice 24. Mettre les nombres complexes qui suivent sous forme $x + iy$:

$\cdot\ e^{i\pi}$	$\cdot\ e^{2i\pi/3}$	$\cdot\ e^{-3i\pi/4}$
$\cdot\ e^{5i\pi/2}$	$\cdot e^{-ln(2)i\pi}$	$\cdot\ e^{2i\pi/6}$

Exercice 25. Déterminer les racines carrées complexes du nombre complexe $5 + 12i$.

Exercice 26. Donner les formes cartésiennes des racines carrée de $-7 - 24i$ et de $-3 + 4i$. Trouver l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^2 + (3+ai)z - 1 + 5i = 0$. Déterminer les racines quatrième de l'unité. Déterminer les racines quatrième de $-7 - 24i$.

Exercice 27. Montrer que tout nombre complexe $z \neq -1$, de module 1, s'écrit $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$ avec x réel.
Indications: poser $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $-\pi < \theta < \pi$, puis faire intervenir $x = \tan(\theta/2)$.