Université de Provence 2006–2007

Techniques Mathématiques de Base

PLANCHE 2

TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1. Exprimer en fonction de $\sin x$, $\cos x$ ou $\tan x$ les valeurs de sin, cos et tan de

$$x-\pi, \quad x+4\pi, \quad -x+5\pi, \quad x-9\pi, \quad -x-12\pi, \quad x+7\pi, \quad -x-3\pi, \quad \frac{\pi}{2}-x, \quad \frac{3\pi}{2}-x.$$

Exercice 2. Sachant que le réel x appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\cos x = 1/3$, déterminer $\sin x$ et $\tan x$ sans calculer x.

Exercice 3. Quelle est la période des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \cos(3t), \quad t \mapsto \sin(\frac{t}{2}), \quad t \mapsto \sin(\omega t), \quad t \mapsto \sin(\omega t + \varphi).$$

Exercice 4. Etudier et tracer le graphe de la fonction $y = \sin(3x)$. De même pour la fonction $y = \sin(3x - \pi/3) - 2$.

Exercice 5. Etudier et tracer le graphe de la fonction $\sec(x) = 1/\cos(x)$.

Exercice 6. Etablir les identités suivantes, valables pour tout réel x

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x, \quad \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$$

Exercice 7. Résoudre les équations

$$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}, \quad \tan x = \tan 3x, \quad \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x) = 0, \quad \cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(3x + \pi) = 0$$

Exercice 8. Si a, b sont des réels, montrez qu'il existe r et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 10. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. (On pourra utiliser $\mathrm{Re}(e^{ikx}) = \cos(kx)$.)

Exercice 11. Montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

(Cette formule permit à Machin de calculer 100 décimales de π en 1706 (*cf.* Le palais de la découverte à Paris)). (Indication: utiliser la formule de $\tan(a + b)$. On peut aussi simplifier l'expression $\frac{(5+i)^4}{239+i}$).

Exercice 12. Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. Déterminer la distance où doit se placer un observateur (de taille négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal (en fonction de p et s) ?

Énoncé à rédiger et à rendre en travaux dirigés.

Exercice 13. Soit $A(9,0)$, $B(9,3)$, $C(8,6)$, $D(7,7)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé. Montrer que les angles $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{ODC}$ sont droits. Si α, β et γ sont les mesures respectives de $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, calculer $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$. En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}.$$

Énoncés complémentaires.

Exercice 14. Trouver une formule exprimant $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Faîtes de même pour $\cos(3x)$. Par récurrence montrer que si $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\sin(nx)$ peut s'exprimer de la forme

$$\sum_{ij} a_{ij} (\sin x)^i (\cos x)^j,$$

où les a_{ij} sont des entiers.

Exercice 15. Etudier et tracer le graphe de la fonction cot : $x \mapsto 1/\tan(x)$.

Exercice 16. Démontrer la formule suivante, indiquée par François Viète dans son *Canon mathematicus* achevé en 1579 :

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha).$$

Exercice 17. Simplifier les expressions

$$\cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x + \sin^3 x, \quad \sin(x+\pi) + \cos(\pi - x) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi).$$

Exercice 18. Placer les points $A(4,0)$, $B(4,2)$ et $C(3,3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. Montrer que le triangle OBC est rectangle en C et que le triangle OAB est rectangle en A. Soit α une mesure en radians de $\widehat{COB}$ et β une mesure en radians de $\widehat{BOA}$. Montrez que

$$\tan\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \tan\beta = \frac{1}{2}.$$

En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$