

## Techniques Mathématiques de Base

## PLANCHE 5

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $y''(x) - y(x) = 0$  sachant que  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 0$ .
- b)  $y''(x) - y(x) = e^{2x}$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 0$ . Chercher une solution particulière de la forme  $y(x) = Ae^{2x}$  où  $A$  est une constante.

**Exercice 2.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$  sachant que  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .
- b)  $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 0$ . Chercher une solution particulière de la forme  $y(x) = e^{4x}(Ax + B)$  où  $A, B$  sont des constantes.

**Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 1$ .
- b)  $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 1$ . Chercher une solution particulière de la forme  $y(x) = A \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$  où  $A, B$  sont des constantes.

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $y''(x) + 4y(x) = 0$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 0$ .
- b)  $y''(x) + 4y(x) = 0$  sachant que  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = 2$ .
- c)  $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$  sachant que  $y(0) = y'(0) = 0$ . Chercher une solution particulière de la forme  $y(x) = Ax \sin(2x)$  où  $A$  est une constante.

**Exercice 5.** Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme  $y(x) = P(x)$ , où  $P(x)$  est un polynôme.

- a)  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2x^2 - 8x + 5$ , où  $P(x)$  est du deuxième degré.
- b)  $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2$ , où  $P(x)$  est du deuxième degré.

**Exercice 6.** a) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \quad (E_1)$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

b) On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \quad (E_2)$$

Montrer que  $f$  est solution de  $(E_2)$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E_1)$  où  $g$  est défini par  $g(x) = e^x f(x)$  pour tout  $x$ . Puis Trouver toutes les solutions de  $(E_2)$ .

**Exercice 7.** Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme  $y(x) = P(x)e^{\lambda x}$ , où  $P(x)$  est un polynôme.

a)  $y''(x) - 4y(x) = xe^{2x}$ , avec  $P(x)$  du deuxième degré et  $\lambda = 2$ .

b)  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x$ , avec  $P(x)$  du troisième degré et  $\lambda = 1$ .

**Exercice 8.** On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + w^2 y(x) = 0 \quad (E)$$

où  $w$  est une constante.

Déterminer  $w$  afin qu'il existe une solution  $f$  à  $(E)$ , non identiquement nulle, et telle que  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

ÉNONCÉ À RÉDIGER ET À RENDRE EN TRAVAUX DIRIGÉS.

**Exercice 9.** Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x \quad (E)$$

1. Trouver la solution de l'équation différentielle homogène  $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$ , vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$ .
2. Chercher une solution particulière de  $(E)$  sous la forme de  $(ax + b)e^x$ .
3. Trouver la solution de l'équation différentielle  $(E)$ , vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$ .
4. Trouver la solution de l'équation différentielle  $(E)$ , vérifiant  $y(1) = y'(1) = 0$ .

**Exercice 10.** Trouver toutes les solutions de :

a)  $y''(t) - y(t) = 0$ ,

b)  $2y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 0$ ,

c)  $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$ ,

d)  $y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$ .

**Exercice 11.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$  sachant que  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ ,

b)  $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$  sachant que  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -2$ ,

c)  $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$  sachant que  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 3$ .