

Techniques Mathématiques de Base

PLANCHE 6

COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1. Étudier la courbe paramétrée d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{t(t^2-1)}{1+t^2} \end{cases}$$

(appelée *strophoïde droite*).

Exercice 2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \sin(2t) \end{cases}$$

1. Tracer la trajectoire du point $M(t)$ (appelée *courbe de Lissajoux*). Placer les deux tangentes à l'origine.
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération au temps t .

Exercice 3. Soit ω un réel. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) &= t \cos(\omega t) \\ y(t) &= t \sin(\omega t) \end{cases}$$

pour $t \in [0; +\infty[$.

On pose $\vec{u} = \cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}$.

1. Montrer que $(O; \vec{u}, \vec{v})$ forme un repère orthonormé direct, où $\vec{v} = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \vec{i} + \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \vec{j}$.
2. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ au temps t vérifie $\vec{V}(t) = \vec{u} + t\omega \vec{v}$.
3. Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ au temps t vérifie $\vec{\Gamma}(t) = -t\omega^2 \vec{u} + 2\omega \vec{v}$.

Exercice 4. Montrer que l'équation polaire d'un cercle passant par O est de la forme $\rho = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$, où a et b sont deux nombres réels.

Exercice 5. Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \theta$.

Exercice 6. Soit a un nombre réel fixé. Montrer que l'équation polaire de la droite verticale passant par le point $A(a; 0)$ est de la forme : $\rho = \frac{a}{\cos(\theta)}$.

Exercice 7. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(t)$ de

coordonnées $(x(t); y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y(t) &= \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}. \end{cases}$$

1. Calculer $x(t)^2 + y(t)^2$ et $x(t)^2 - y(t)^2$.
2. En déduire une équation cartésienne de la trajectoire du point $M(t)$ (*appelée lemniscate de Bernoulli*).
3. Déterminer une équation polaire de cette trajectoire (*penser à $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$*).

ÉNONCÉ À RÉDIGER ET À RENDRE EN TRAVAUX DIRIGÉS

- Exercice 8.** 1. Donner l'équation polaire d'une droite passant par le point $B(0; b)$ et faisant un angle θ_0 avec la droite (Ox) , où $\theta_0 \in]0; \pi/2[$. Donner également l'équation cartésienne de cette droite.
2. Que deviennent ces équations quand l'angle θ_0 vaut 0 ou $\pi/2$?

EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

- Exercice 9.** Étudier la courbe paramétrée d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

(*c'est une autre lemniscate de Bernoulli*).

- Exercice 10.** Étudier la courbe paramétrée d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= 2 \cos(t) \\ y(t) &= \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(*c'est une autre courbe de Lissajoux*).

- Exercice 11.** Tracer la courbe paramétrée d'équation :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t}{2}(t - |t|) \\ y(t) &= \frac{t}{2}(t + |t|). \end{cases}$$

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ est dérivable.

- Exercice 12.**

1. Tracer la courbe (C) d'équation polaire $\rho = \frac{1}{4 + 3 \cos(\theta)}$.

2. Écrire l'équation paramétrique de (C) . Vérifier que c'est une ellipse.

- Exercice 13.** Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = e^{\lambda \theta}$, où λ est un nombre réel fixé.