Université de Provence 2006–2007

Techniques Mathématiques de Base

PLANCHE 7

COURBES ET SURFACES

Exercice 1. Soit C la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations paramétriques

$$\begin{array}{rcl} x & = & \cos(t) \\ y & = & \sin(t) \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}$$

Déterminer les points d'intersection de C avec le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$ et les tangentes à C en ces points.

Exercice 2. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation $\rho = \dfrac{1}{4 + \cos(3\theta)}$. On montrera que l'étude peut se limiter à $\theta \in [0, \pi/3]$.

Exercice 3. (*Spirale logarithmique*)Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation $\rho = ae^{\lambda\theta}$, $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ étant fixés.

Exercice 4. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation $\rho = 1 + 2\cos(\theta) - 4\cos^2(\theta)$.

a) Montrer que l'on peut se restreindre à $\theta \in [0, \pi]$.
b) Montrer que la valeur maximale de ρ est obtenue pour $\theta = \arccos(\frac{1}{4})$. Calculer ce maximum.
c) Montrer que l'origine est un point multiple.

POUR CHACUN DES EXERCICES SUIVANTS ON S'ATTACHERA À ESQUISSER UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$f(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) \ .$$

On note $S = f(\mathbb{R}^2)$.

a) Montrer que si un point $m \in S$ alors, pour tout λ réel positif, $\lambda m \in S$. En déduire que S est une réunion de demi-droites passant par l'origine.

b) Déterminer les courbes de niveau de f puis les courbes d'intersection de l'image de S avec les plans d'équation

$$z = \lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Montrer que f est une paramétrisation de la surface d'un cône, dont on donnera l'équation cartésienne.
d) Déterminer les plans tangents à cette surface aux points $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ et déterminer la droite d'intersection de ces plans, ainsi que des vecteurs unitaires normaux à ces plans.

Exercice 6. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'equation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Déterminer les plans tangents à S aux points $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ et $(0,0,3)$. Déterminer l'intersection de ces trois plans.

Exercice 7. Soit S la surface définie par l'équation

$$z = xy \ .$$

a) Déterminer les plans tangents à S aux points $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(2,3,6)$.

b) Déterminer l'intersection de chacun de ces trois plans tangents avec S.

c) Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point arbitraire et l'intersection de ce plan avec S.

d) Montrer que S est la réunion d'une famille infinie de droites (on dira que S est une surface réglée).

Exercice 8. Montrer que la surface représentée paramétriquement par

$$f : (t,z) \to (t^2 + z\sin t, t + z\cos^2 t, z)$$

est engendrée par des droites.

Exercice 9. On considère l'ensemble

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z + (x+y)^2 = 1 \ \}$$

1– Déterminer la nature des courbes qui sont les intersections de S respectivement avec les plans $z = 0$ et $y = x$.

2– On note T_λ la translation de vecteur $v = (\lambda, -\lambda, 0)$, où λ est un paramètre réel quelconque. Montrer que S est invariante par la translation T_λ. On appréciera une représentation graphique de S.

3– Donner une équation cartésienne du plan tangent en $m = (x,y,z)$ à S.

4– Écrire les composantes d'un vecteur unitaire N normal à S en m.

Exercice 10. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la surface de révolution P engendrée par la rotation autour de l'axe des z de la courbe définie par $y = 0, z^2 - 2px + p^2 = 0$ (p est fixé). Cette surface est appelée *paraboloïde de révolution.* Écrire l'équation du paraboloïde sous la forme $f(x,y,z) = 0$.

Exercice 11. Calculer les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ donnée par

$$f : (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy\sin(z)}{x^2+y^2+z^2} & , \ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \\ 0 & , \text{ en } (0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 12.

Soient $R_1 > R_2 > 0$. On considère la surface $\mathbb{T}$ de révolution, d'axe Oz, engendrée par le cercle vertical défini par les équations:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x - R_1)^2 + z^2 = R_2^2 \end{cases}$$

1) Écrire en fonction de (φ, θ, z) (les coordonnées cylindriques) et R_1, R_2, l'expression des coordonnées (x,y,z) d'un point $m \in \mathbb{T}$.

2) Écrire l'équation cartésienne de $\mathbb{T}$ sous la forme $f(x,y,z) = 0$.